

UNIVERZA V LJUBLJANI

Fakulteta za strojništvo

Janko Slavič

Dinamika, mehanska nihanja in mehanika tekočin

(2. izdaja)

Ljubljana, 2017

Naslov dela: Dinamika, mehanska nihanja in mehanika tekočin
Izdaja: 2. izdaja

Avtor: izr. prof. dr. Janko Slavič u.d.i.s
Recenzenta: prof. dr. Miha Boltežar, univ. dipl. inž.
višji pred. dr. Jože Stropnik, univ. dipl. inž.
Jezikovni pregled: Andreja Cigale, prof. slov.

Slika na naslovnici: shutterstock
Slike na hrbtni strani: Luka Knez (zgoraj), Janez Luznar (sredina), Janko Slavič (spodaj)

© Fakulteta za strojništvo in dr. Janko Slavič

Brez soglasja založnika je prepovedano vsakršno reproduciranje ali prepis v katerikoli obliki.

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

531.3(075.8)

532.5(075.8)

Slavič, Janko, 1978-

Dinamika, mehanska nihanja in mehanika tekočin/
Janko Slavič. - 2. izd. - Ljubljana: Fakulteta za strojništvo,
2017

ISBN 978-961-6980-40-1

291752704

Kazalo

Seznam uporabljenih simbolov	vii
Predgovor	xi
1 Uvod	1
1.1 Pregled obravnavanih področij	1
1.2 O uporabi učbenika	2
1.2.1 Oblika	2
1.3 Temeljni koncepti	3
1.3.1 Pristop k reševanju	5
2 Dinamika trdnin	7
2.1 Kinematika točke	7
2.1.1 Premočrtno gibanje	7
2.1.2 Ravninsko gibanje	17
2.1.3 Pravokotni ali kartezijev koordinatni sistem	18
2.1.4 Naravni koordinatni sistem	19
2.1.5 Polarni koordinatni sistem	20
2.2 Kinetika masne točke	31
2.2.1 Gibalna količina	31
2.2.2 Vrtilna količina	32

2.2.3	Energijske razmere	34
2.2.4	Gibalne enačbe	38
2.3	Kinetika sistema masnih točk	54
2.3.1	Gibalna količina	54
2.3.2	Vrtilna količina	56
2.3.3	Energijske razmere	59
2.4	Kinetika togih teles	67
2.4.1	Prostorsko gibanje togega telesa	67
2.4.2	Ravninsko gibanje togega telesa	71
2.4.3	Sistem togih teles	76
2.4.4	Rotacija okoli nepomične osi v prostoru	84
2.5	Trk	94
2.5.1	Premi centrični trk	95
2.5.2	Poševni centrični trk	99
3	Mehanska nihanja	107
3.1	Lastna nihanja	109
3.1.1	Vpliv prednapetja	111
3.1.2	Vpliv mase vzmeti	112
3.1.3	Nosilci in gredi v funkciji vzmeti	114
3.1.4	Vzporedna in zaporedna vezava vzmeti	116
3.2	Lastna dušena nihanja	121
3.2.1	Identifikacija dušenja z metodo logaritemskega upada	124
3.3	Vsiljena nihanja	132
3.3.1	Odziv sistema na harmonsko motnjo	132
3.3.2	Odziv sistema na centrifugalno motnjo	136
3.4	Pasivna vibroizolacija	147

4	Mehanika tekočin	157
4.1	Lastnosti tekočin	158
4.1.1	Masa in teža	158
4.1.2	Predpostavka konstantne gostote	158
4.1.3	Viskoznost	160
4.1.4	Površinska napetost	163
4.1.5	Toplota	164
4.2	Statika tekočin	166
4.2.1	Tlak v mirujoči tekočini	166
4.2.2	Hidrostatični tlak na stene posode	170
4.2.3	Vzgon in plavanje teles	175
4.3	Dinamika tekočin	187
4.3.1	Kinematika tekočin	187
4.3.2	Kinetika idealnih kapljev – delec tekočine	191
4.3.3	Kinetika idealnih kapljev – kontrolna prostornina	201
4.3.4	Kinetika viskozne tekočine	221
5	Dodatek	235
5.1	Masni vztrajnostni momenti	235
5.1.1	Glavni masni vztrajnostni momenti	236
5.1.2	Translatorni premik osi koordinatnega sistema	237
5.1.3	Zvrnitev osi koordinatnega sistema	239
5.2	Nekatere podrobnejše izpeljave	250
5.2.1	Vsiljena nihanja	250
5.2.2	Pasivna vibroizolacija	251
5.3	Izbrana poglavja matematike	253
5.3.1	Odvajanje vektorja	253
5.3.2	Gradient skalarnega polja	254
5.3.3	Skalarni produkt	254
5.3.4	Vektorski produkt	254
5.3.5	Krivuljni integral	255

5.3.6	Trigonometrija	256
5.4	Izbrani izrazi	257
5.4.1	Dinamika trdnin	257
5.4.2	Mehanska nihanja	258
5.4.3	Mehanika tekočin	259
5.5	Izbrane preglednice in diagrami	260
5.5.1	Težiščni masni vztrajnostni momenti	260
5.5.2	Gostota vode	261
Literatura		264
Stvarno kazalo		264

Seznam uporabljenih simbolov

a	velikost pospeška / pri premočrtnem gibanju trenutni pospešek	m/s^2	(2.6)
a_n	normalni pospešek	m/s^2	(2.38)
a_t	tangentni pospešek	m/s^2	(2.38)
$\mathbf{a}$	trenutni pospešek	m/s^2	(2.23)
$\bar{a}$	povprečni pospešek	m/s^2	(2.5)
$\bar{\mathbf{a}}$	povprečni pospešek	m/s^2	(2.22)
e	ekscentričnost rotorja	m	(2.169)
$\mathbf{e}_n$	normalni enotski krajevni vektor		(2.35)
$\mathbf{e}_r$	radialni enotski krajevni vektor		(2.41)
$\mathbf{e}_t$	tangentni enotski krajevni vektor		(2.31)
$\mathbf{e}_\varphi$	krožni enotski krajevni vektor		(2.41)
E_k	kinetična energija	$\text{J}=\text{Nm}$	(2.69)
E_m	mehanska energija	$\text{J}=\text{Nm}$	(2.83)
E_p	potencialna energija	$\text{J}=\text{Nm}$	(2.71)
$\mathbf{g}$	gravitacijski pospešek	m/s^2	(2.72)
$\mathbf{i}$	enotski vektor pravokotnega koordinatnega sistema		(2.27)
$\mathbf{I}$	impulz sile	kg m/s	(2.58)

I_E	impulz faze ekspanzije	kg m/s	(2.186)
I_K	impulz faze kompresije	kg m/s	(2.186)
$\mathbf{J}$	masna vztrajnostna matrika	kg m ²	(2.141)
$\mathbf{j}$	enotski vektor pravokotnega koordinatnega sistema		(2.27)
J_{xx}	osni masni vztrajnostni moment	kg m ²	(2.140)
J_{xy}	deviacijski masni vztrajnostni moment	kg m ²	(2.140)
J_{xz}	deviacijski masni vztrajnostni moment	kg m ²	(2.140)
J_{yx}	deviacijski masni vztrajnostni moment	kg m ²	(2.140)
J_{yy}	osni masni vztrajnostni moment	kg m ²	(2.140)
J_{yz}	deviacijski masni vztrajnostni moment	kg m ²	(2.140)
J_{zx}	deviacijski masni vztrajnostni moment	kg m ²	(2.140)
J_{zy}	deviacijski masni vztrajnostni moment	kg m ²	(2.140)
J_{zz}	osni masni vztrajnostni moment	kg m ²	(2.140)
k	togost vzmeti	N/m	(2.77)
$\mathbf{k}$	enotski vektor pravokotnega koordinatnega sistema		(2.129)
L_z	vrtilna količina v smeri koordinate z	kg m ² /s	(2.147)
$\mathbf{L}$	vrtilna količina	kg m ² /s	(2.59)
$\mathbf{L}_s$	vrtilna količina sistema masnih točk	kg m ² /s	(2.108)
m	masa togega telesa	kg	(2.132)
m_i	masa i -te masne točke	kg	(2.95)
m_s	masa sistema masnih točk	kg	(2.96)
$M_{A,i}$	moment glede na nepomično vrtilišče A	Nm	(2.166)
$\mathbf{M}$	moment	Nm	(2.64)
P	število prostostnih stopenj		(1.1)
$\mathbf{p}$	gibalna količina	kg m/s	(2.53)
$\mathbf{p}_s$	gibalna količina sistema masnih točk	kg m/s	(2.97)
Δp	sprememba gibalne količine	m	(2.58)
$\mathbf{r}$	krajevni vektor	m	(2.20)

$\mathbf{r}_0$	krajevni vektor začetne lege	m	(2.26)
$\mathbf{r}_1$	krajevni vektor končne lege	m	(2.26)
$\dot{\mathbf{r}}$	trenutna hitrost	m/s	(2.21)
$\ddot{\mathbf{r}}$	trenutni pospešek	m/s ²	(2.23)
$\mathbf{r}_T$	krajevni vektor do težišča sistema masnih točk	m	(2.95)
$\mathbf{r}_T$	krajevni vektor do težišča togega telesa	m	(2.131)
$\mathbf{R}$	reakcije v podpori	N	(2.161)
s	pot	m	(2.2)
s_0	začetna lega	m	(2.13)
s_1	končna lega	m	(2.13)
$\dot{s}$	trenutna hitrost	m/s	(2.3)
$\ddot{s}$	trenutni pospešek	m/s ²	(2.6)
Δs	sprememba lege/poti	m	(2.1)
t	čas	s	(2.2)
t_0	začetni čas	s	(2.9)
t_1	končni čas	s	(2.9)
Δt	sprememba časa	s	(2.2)
v	velikost hitrosti / pri premočrtnem gibanju trenutna hitrost	m/s	(2.3)
v_0	začetna hitrost	m/s	(2.9)
v'	hitrost po trku	m/s	(2.185)
$\mathbf{v}$	trenutna hitrost	m/s	(2.21)
$\bar{v}$	povprečna hitrost (skalar)	m/s	(2.2)
$\mathbf{v}_0$	začetna hitrost	m/s	(2.25)
$\mathbf{v}_1$	končna hitrost	m/s	(2.25)
$\bar{\mathbf{v}}$	povprečna hitrost	m/s	(2.20)
Δv	sprememba hitrosti	m/s	(2.5)
$\Delta \mathbf{v}$	sprememba hitrosti	m/s	(2.22)
W_{12}	delo sile na poti od točke 1 do 2	J=Nm	(2.66)

x		Seznam uporabljenih simbolov	
W^n	delo nekonservativnih sil	J=Nm	(2.85)
X	amplituda nihanja	m	(3.4)
y_T	višina težišča sistema masnih točk	m	(2.129)
α	kotni pospešek	rad/s ²	(2.48)
ω	kotna hitrost	rad/s	(2.44)
ω_0	lastna krožna frekvenca	rad/s	(3.4)
ω	kotna hitrost	rad/s	(2.135)
ρ	relativni krajevni vektor	m	(2.109)
ε	koeficient trka		(2.186)
φ	kot	rad	(2.41)

Predgovor

Učbenik je nastal iz želje, da bi študentje Fakultete za strojništvo, Univerze v Ljubljani, pri predmetu Tehniška mehanika 2 (visokošolski strokovni študij) imeli učbenik, ki bi v čimvečji meri pokrival študijsko snov. Začetki dela učbenika segajo že v leto 2002, ko sem kot asistent prof. dr. Mihe Boltežarja pri predmetu Dinamika začel pripravljati zbirko rešenih nalog za študente [1]. Z leti se je nakopičilo relativno veliko gradiva, ki sem ga zbral in razširil v pričujočem učbeniku v obliki zgledov z detajlnimi postopki ter komentarji, podprtimi s teorijo.

Pedagoški proces in gradiva smo sproti posodabljali in prilagajali študentom. Danes večina študentov opravi izpit v obliki sprotne študija. To med drugim pomeni, da vsak teden prek spletnega sistema moj.ladisk.si sproti rešujejo domače naloge. Izbor spletnih nalog je vključen tudi v učbenik v obliki nalog z rešitvami.

Pri pripravi spletnih nalog so mi pomagali sodelavci v Laboratoriju za dinamiko strojev in konstrukcij. V učbeniku je vključenih skupaj 70 nalog, od katerih sva jih z dr. Miho Pirnatom pripravila 10, po 3 z Matjažem Mršnikom, Matijo Brumatom in Luko Knezom, 2 nalogi skupaj z dr. Martinom Česnikom in 1 s Špelo Bolka. Luka in Matija sta prebirala tudi prve verzije tega učbenika. Za njihov prispevek sem jim hvaležen.

Andreji Cigale sem hvaležen za jezikovni pregled.

Zahvaliti se želim tudi recenzentoma, prof. dr. Mihi Boltežarju in viš. pred. dr. Jožetu Stropniku, za natančen pregled in konstruktivno kritiko.

Še posebej se želim zahvaliti prof. dr. Mihi Boltežarju za dolgoletno uspešno sodelovanje in podporo, katerega plod je ta učbenik.

Zahvaljujem se tudi moji ženi za podporo in razumevanje ter otrokoma, da sta ponoči, ko sem pogosto delal na učbeniku, ponavadi spala.

Še nekaj statistike: učbenik obravnava 13 teoretičnih sklopov, v okviru katerih je izpeljanih 76 temeljnih izrazov; teorija je dodatno pojasnjena z 39 podrobnimi zgledi. Podanih je tudi 70 nalog z rešitvami. Teorija je podkrepljena z več kot 160 slikami,

zgledi s pomočjo 103 slik in naloge z nekaj manj kot 70 slikami. Vseh slik je torej več kot 330! Oštevilčenih je čez 470 in neoštevilčenih skoraj 360 matematičnih izrazov. V robu je podanih več kot 200 opomb.

Domača stran učbenika se nahaja na naslovu: www.ladisk.si/knjige.

Študentom želim, da bodo s pomočjo tega učbenika obravnavano snov temeljito osvojili ter bili v okviru svojega profesionalnega dela uspešnejši.

Oktober 2014, Janko Slavič.

Drugi izdaji na pot

Veseli me, da je bila prva izdaja učbenika dobro sprejeta in je posledično relativno hitro pošla. Drugo izdajo sem izkoristil za manjše vsebinske, številčne in tehnične popravke. Večino pomanjkljivosti so odkrili vestni študentje, ki so učbenik natančno brali; za oboje sem jim hvaležen!

Oktober, 2017, Janko Slavič

Poglavje 1

Uvod

1.1 Pregled obravnavanih področij

Klasična mehanika se deli na *mehaniko trdnin*¹ in *mehanično tekočin*². Pri predmetu Tehniška mehanika 1 študentje spoznajo *statiko* trdnin, v okviru tega učbenika pa znanje razširimo na *dinamiko* trdnin ter nato nadaljujemo z osnovami *mehanike tekočin*.

¹ang. *solid mechanics*

²ang. *fluid mechanics*

Dinamika trdnin se v osnovi deli na *kinematiko* in *kinetiko*. Pri kinematiki proučujemo gibanje teles, ne da bi poznali sile, ki tako gibanje povzročijo. Primer kinematičnega problema je vožnja avtomobila s konstantno hitrostjo skozi zavoj; to bomo spoznali pozneje, za izračun pospeška na voznika potrebujemo samo t.i. kinematične veličine (hitrost vozila v in trenutni polmer zavoja r). Če pa nas zanima sila na kolesa, da avto ne zdrsne, je to že kinetični problem. Pri kinetiki proučujemo gibanje kot posledico delovanja sil (in momentov). Spoznavanje dinamike bomo pričeli s temeljnimi principi, ki bodo pozneje navedeni v tem poglavju. Nato bomo osnovne zakone dinamike spoznali na primerih masne točke, sistema masnih točk in na koncu togega telesa. Obravnavanje togih teles bomo razširili na primer rotacije okoli stalne osi, ki je v praksi pogost. Nadaljevali bomo z obravnavanjem trka. Dinamiko togih teles bomo zaključili z obravnavanjem mehanskih nihanj (lastnih, dušenih, vsiljenih ter prenosnosti vibroizolacije).

Mehaniko tekočin delimo na *statiko*³ in *dinamiko*⁴. Podobno

³Uporablja se tudi izraz: *hidrostatika*.

⁴Uporablja se tudi izraz: *hidrodinamika*.

kot pri trdninah se tudi dinamika tekočin deli na *kinematiko* in *kinetiko* tekočin.

1.2 O uporabi učbenika

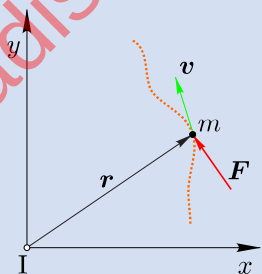
Pedagoško in oblikovno je učbenik nastal kot rezultat več različnih virov, predvsem virov prof. Boltežarja [2], prof. Kuhlja [3], prof. Meriam in prof. Kraige [4], prof. Elgerja s soavtorji [5]. Vsako posamezno poglavje najprej obravnava teoretično ozadje, ki je potrebno za razumevanje obravnavane tematike; pri tem se vedno navezujemo na predhodno predstavljeno znanje v učbeniku. Teoretičnemu delu sledi natančen zgled s pojasnjenim postopkom reševanja. Vsako poglavje se zaključi z nalogami, ki imajo podane rešitve, ne pa tudi postopkov. Tukaj velja izpostaviti, da je natančnost podajanja rezultata v praksi odvisna od natančnosti vhodnih podatkov. Da se olajša sledenje in preverjanje, so numerični rezultati podani z večjim številom decimalnih mest kot je ponavadi smiselno.

1.2.1 Oblika

Teoretični del učbenika ima svetlo modro, zgledi imajo svetlo zeleno in naloge svetlo rdeče ozadje. Sicer pa oblikovno sledimo strogim standardom tehničnega izražanja [6, 7]. Na kratko to pomeni, da so spremenljivke pisane poševno (npr. x), števila in enote pokončno (npr. 1 m), vektorji poševno poudarjeno in praviloma z malo črko (npr. $\mathbf{v}$), matrike poševno poudarjeno in praviloma z veliko črko (npr. $\mathbf{M}$). Temu sledijo tudi pod- ali nadpisani indeksi; če indeks ni spremenljivka (npr. i), ampak opisen (npr. k za kinetična energija), potem je napisan pokončno (npr. E_k).

Pri slikah uporabljamo sledeče barvno pravilo [4]:

- **rdeče**: sile in momenti,
- **zeleno**: hitrosti in pospeški,
- **črtkano oranžno**: trajektorije premikajočih točk,
- **modro**: vsebinsko poudarjeni del slike.



Slika 1.1

Pri tem so krajevni vektorji narisani s tanko črto in puščico, vektorji sil, momentov, hitrosti in pospeškov pa poudarjeno.

Primer je prikazan na sliki 1.1. Sicer pa so telesa, pri katerih maso upoštevamo, senčena, tista z zanemarljivo maso pa so narisana samo z robom.

Temeljni izrazi, ki so minimalno potrebni za reševanje nalog, so prikazani tako⁵:

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} \quad (1.1)$$

in pri zgledih se v čim večji meri sklicujemo nanje.

Sklici na enačbe so v okroglem oklepaju (1.1), klici na vire pa v oglatem oklepaju [2]. Sklici na slike in preglednice so zapisani golj s številko, primer: slika 1.1.

1.3 Temeljni koncepti

Prostor Mehanski sistemi se v realnem svetu vedno nahajajo v prostoru; kadar take sisteme teoretično raziskujemo, moramo definirati idealiziran, matematični prostor, v katerem uporabljeni zakoni veljajo. Takšen namišljen, idealen prostor imenujemo nepospešeni ali inercialni referenčni okvir⁶. Na sliki 1.2 je prikazan primer inercialnega referenčnega okvirja, ki je označen s črko I. Lego v takem inercialnem okvirju ponavadi popišemo s pomočjo kartezijskega (pravokotnega) koordinatnega sistema. V dejanskem svetu takega idealnega inercialnega referenčnega okvirja ni; če npr. zelo natančno pogledamo neko "mirujočo" točko na površini Zemlje, potem ugotovimo, da je ta točka izpostavljena pospeškom, ki so izredno majhni in so predvsem posledica gibanja planetov. Za veliko večino praktičnih primerov lahko te vplive zanemarimo in smatramo zemljino površino kot primer inercialnega okvirja.

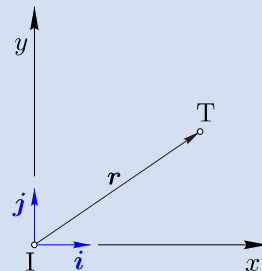
Dolžina je merilo prostorske razsežnosti. Standardna enota za popis dolžine je *meter*: m.

Čas je merilo zaporednosti dogodkov. Standardna enota za popis časa je *sekunda*: s.

Masa je merilo odpora na spremembo lege ali tudi merilo gravitacijske privlačne sile. Standardna enota za popis mase je *kilogram*: kg.

⁵Za temeljne izraze se štejejo tisti, s katerimi se lahko z matematično operacijo (integriranjem, odvajanjem) in znanimi pogoji naloge (npr. začetni pogoji) pride do rezultata.

⁶ang. *inertial frame of reference*

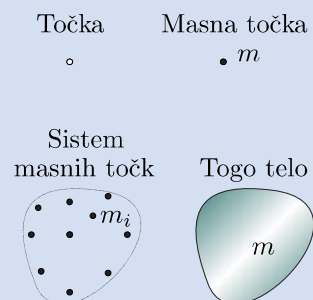


Slika 1.2

Termodinamska temperatura je absolutno merilo temperature. Standardna enota za popis termodinamske temperature je *kelvin*: K.

⁷V nasprotju s *skalarnimi veličinami* imajo *vektorske veličnosti*, *smer*, ki jo določa premica nosilka vektorja in *usmerjenost*, ki jo določa puščica.

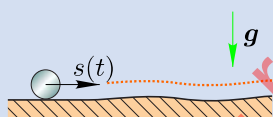
⁸Enota je ime dobila po: *Isaacu Newtonu* (*1642, †1727).



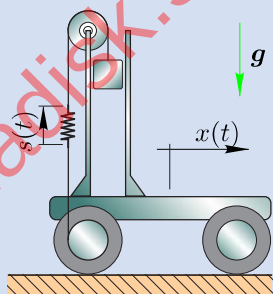
Slika 1.3

⁹ang. *degrees of freedom*

¹⁰Pri prožnih telesih se število prostostnih stopenj poveča, saj je treba opisati še stanje prožnega telesa.



Slika 1.4



Slika 1.5

Sila je *vektorska veličina*⁷, ki meri delovanje enega telesa na drugega. Standardna enota za popis sile je *newton*⁸: $N = \text{kg m/s}^2$.

Točka, masna točka, sistem masnih točk, togo telo.

Obravnavo dinamike bomo začeli z enostavno *točko*, ki bo definirana v nekem inercialnem referenčnem okvirju. Bistvena lastnost točke je, da je njen polmer zanemarljivo majhen. Če taki točki dodamo maso, potem govorimo o *masni točki*. Nadalje, če več takih masnih točk povežemo v sistem s poljubnimi povezavami, potem govorimo o *sistemu masnih točk*. Če se omejimo na obravnavanje *togih teles*, potem so povezave med masnimi točkami, ki sestavljajo določeno telo, konstantne in toge (tudi ob poljubno veliki sili, ki bi delovala na tako telo). Slika 1.3 shematično prikazuje posamezne sisteme, ki jih bomo natančneje obravnavali pozneje.

Prostostne stopnje. Število *prostostnih stopenj*⁹ predstavlja najmanjše število neodvisnih koordinat, s katerim lahko enolično opišemo lego nekega telesa¹⁰. Za število prostostnih stopenj se uporablja oznaka P .

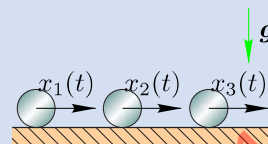
Tipičen primer sistema z eno prostostno stopnjo je prikazan na sliki 1.4: lego valja, ki se (brez podrsavanja) kotili po površini, je mogoče enolično določiti z eno neodvisno spremenljivko; to je lahko pot težišča valja $s(t)$, lahko pa tudi zasuk okoli težišča $\varphi(t)$, ki je s potjo $s(t)$ povezana prek polmera valja r : $s(t) = r \varphi(t)$.

Primer sistema s dvema prostostnima stopnjama je prikazan na sliki 1.5: na vozičku je vertikalno vodilo za maso. Vzmet povezuje vrv, ki je pripeta na maso z vrvjo, ki se navija na kolo. Legu takšnega sistema je mogoče popisati z dvema neodvisnima spremenljivkama: lahko sta to horizontalna lega ohišja vozička $x(t)$ in raztezek vzmeti $s(t)$.

Sistem s tremi prostostnimi stopnjami je prikazan na sliki 1.6: trije valji se kotalijo po ravni površini. Gibanje vsakega je mogoče natančno določiti z eno neodvisno spremenljivko. Za popis sistema treh takih valjev, so potrebne torej tri neodvisne spremenljivke: $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$.

Oglejmo si še popis togega telesa v (trirazsežnem) prostoru: za enoličen popis lege potrebujemo šest neodvisnih spremenljivk (tri translatorne in tri rotacijske prostostne stopnje).

Tukaj velja izpostaviti še, da se prostost odzame, kadar je določena spremenljivka definirana (npr. pri sliki 1.5 bi definiranje npr. $x(t) = 2t \text{ m/s}$ število prostostnih stopenj zmanjšalo za eno).



Slika 1.6

1.3.1 Pristop k reševanju

Reševanje fizikalnega problema/naloge je lahko zahtevno in včasih ne vemo, kako se naloge lotiti. Spodaj bomo v treh korakih izpostavili nekaj vprašanj, ki bodo v pomoč pri reševanju:

1. Fizikalno razumevanje naloge. Kakšno dogajanje opisuje? Katere predpostavke/poenostavitve lahko naredimo? Katere dimenzije/mase so zanemarljive? Katere sile/momenti so zanemarljivi? Koliko prostostnih stopenj ima opazovani sistem? Prvi korak se konča s *skico naloge*¹¹!
2. Uporaba temeljnih konceptov/izrazov. Se katera veličina (gibalna, vrtilna, energija) ohranja? Če se katera veličina spremeni ali vemo, za koliko se spremeni? Ali nas naloga sprašuje po odvisnosti od časa ali po odvisnosti od poti? Nas zanima samo začetno in končno stanje? Kateri koordinatni sistem uporabiti? Katere prostostne stopnje uporabiti?
3. Reševanje. Nalogo rešujemo po korakih. V praksi si je najbolje pomagati z grafičnimi prikazi rezultatov, na tak način namreč hitro ugotovimo morebitne ne-konsistentnosti rezultatov.

Če prva dva koraka dovolj dobro premislimo, se tretji korak lahko izkaže kot zelo preprost. V kolikor smo površni in se prehitro lotimo tretjega koraka, je reševanje manj predvidljivo, nevarnost slepe poti in nepotrebnega izgubljanja časa večja.

¹¹Skica je izredno pomembna. Na skico vrišemo vse spremenljivke, mase ... na katere se sklicujemo med reševanjem naloge!

www.ladisk.si - reprodukcija ni dovoljena 26. 10. 2017

Poglavje 2

Dinamika trdnin

2.1 Kinematika točke

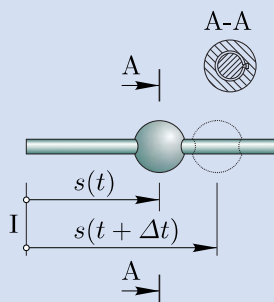
Kot smo že zapisali v uvodnem poglavju, kinematika obravnava gibanje teles upoštevajoč samo *kinematične veličine* (lega, hitrost, pospešek). Sile, ki povzročijo gibanje, nas v okviru kinematike ne zanimajo in posledično nas ne zanimajo niti vztrajnostni vplivi mas (torej masa sama).

Kinematika na splošno ni primarni fokus tega učbenika, zato se bomo omejili zgolj na kinematiko točke (torej brez mase in z neskončno majhnim polmerom), ki je pomembna za poznejša poglavja učbenika. Predstavljeni bodo nekateri temeljni koncepti reševanja nalog v dinamiki, kot primer postavimo zgolj časovno ali krajevno odvisnost, premočrtno ali ravninsko gibanje in različne koordinatne sisteme.

2.1.1 Premočrtno gibanje

Že ime samo pove, da o *premočrtnem gibanju* točke govorimo takrat, kadar se določena točka giblje vzdolž premice. Za enolično v lege take točke potrebujemo eno neodvisno spremenljivko (število prostostnih stopenj je torej $P = 1$).

Časovna odvisnost Pogosto nas v praksi zanima, *kdaž* se je *kaj* zgodilo; torej časovna odvisnost dogajanja. Kot primer časovno definirane premočrtne kinematike si pogledjmo sliko 2.1: v inercialnem okvirju I je prikazana krogla,



Slika 2.1

ki se lahko pomika vzdolž vodilne palice. S $s(t)$ je označena lega krogle pri času t in $s(t + \Delta t)$ lega pri času $t + \Delta t$. Sprememba lege v spremembi časa Δt je:

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t). \quad (2.1)$$

Kjer spremembo lege ponavadi poimenujemo *pot*. Če pot Δs delimo s spremembo časa Δt , s tem določimo *povprečno hitrost*:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (2.2)$$

Ko končni čas Δt zelo skrajšamo, govorimo o infinitezimalno kratkem času dt ; seveda se v tem času izvede tudi infinitezimalno majhna sprememba lege ds . Ker ne govorimo več o končno dolgem času, pač pa o zelo kratkem času, v katerem telo spremeni lego, lahko na ta način izračunamo *trenutno hitrost* v ; matematično to zapišemo:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (2.3)$$

in beremo: odvod lege s po času t . Odvode po času sicer označimo tudi s "piko" nad spremenljivko¹², ki jo odvajamo, torej:

$$v = \dot{s} = \frac{ds}{dt}. \quad (2.4)$$

Na podoben način s pomočjo spremembe hitrosti $\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t)$ izračunamo *povprečni pospešek* v nekem časovnem obdobju Δt :

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (2.5)$$

in *trenutni pospešek*:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}. \quad (2.6)$$

Zaključimo torej lahko, da z odvajanjem trenutne lege s po času izpeljemo trenutno hitrost; z odvajanjem trenutne hitrosti po času pa pospešek:

¹²V praksi so pogosti odvodi po času in po kraju. Uveljavljen krajši zapis za odvod po času je s "piko" in odvod po kraju s z apostrofom, primer: $w'(s) = dw/ds$.

$$v = \dot{s} \quad \text{in} \quad a = \dot{v} = \ddot{s}. \quad (2.7)$$

Z integracijo po času pa prehajamo v obratno smer. Če se vrnemo k izrazu, ki definira pospešek (2.6): $a = dv/dt$, potem lahko izpeljemo:

$$a \, dt = dv. \quad (2.8)$$

Izpeljani izraz lahko integriramo na (2.9) po času, na desni pa po hitrosti:

$$\int_{t_0}^{t_1} a \, dt = \int_{v_0}^{v_1} dv. \quad (2.9)$$

Pri tem smo izbrali *določeno integriranje*¹³, kjer začnemo integrirati pri času t_0 , ko je hitrost enaka v_0 in končamo pri trenutnem času t_1 , ko je trenutna hitrost $v_1 = v(t_1)$. Iz izraza (2.9) izpeljemo:

$$v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} a \, dt \quad (2.10)$$

in naprej:

$$v(t_1) = v_1 = v_0 + \int_{t_0}^{t_1} a \, dt. \quad (2.11)$$

Podobno lahko z integriranjem hitrosti izpeljemo trenutno lego. Z izpeljavo začnemo pri trenutni hitrosti (2.3): $v = ds/dt$:

$$v \, dt = ds. \quad (2.12)$$

Izpeljani izraz lahko integriramo na levi po času, na desni pa po legi¹⁴:

$$\int_{t_0}^{t_1} v \, dt = \int_{s_0}^{s_1} ds. \quad (2.13)$$

Podobno kot za pospešek lahko potem, ko vstavimo meje, zapišemo:

$$s(t_1) = s_1 = s_0 + \int_{t_0}^t v \, dt. \quad (2.14)$$

¹³Ker je fizikalno nazornejše, bomo v tem učbeniku vedno uporabljali določeno integriranje (v nasprotju z *nedoločenim integriranjem*, pri katerem moramo manjkajoče konstante določiti pozneje).

¹⁴Če začetna lega s_0 en bi bila znana, bi še vedno lahko izračunali spremembo lege oz. pot.

Krajevna odvisnost Pri kinetiki masne točke bo postalo jasno, da se gibalna količina spremeni zaradi delovanja sile; velikost spremembe pa je odvisna od velikosti sile in od trajanja spremembe. Primarno je torej dinamika časovno odvisna, redko krajevno. Kljub temu pa nas pri časovno odvisnih sistemih lahko zanima krajevna odvisnost. Kot primer izpostavimo hitrost pri določeni legi.

Z razmišljanjem začnimo pri izrazu (2.6): $a = dv/dt$, ki definira trenutni pospešek kot funkcijo časa. Na desni strani imamo razmerje *spremembe hitrosti* proti *spremembi časa*, ki nam omogoča, da s pomočjo integracije izpeljemo trenutno hitrost v odvisnosti od časa $v(t)$ (2.9). Analogno bi lahko pričakovali, da je za izpeljavo hitrosti v odvisnosti od lege $v(s)$, treba imeti pospešek definiran kot razmerje spremembe hitrosti proti *spremembi lege*: dv/ds . Kmalu bomo ugotovili, da je to mogoče. Razmišljanje začnimo s tem, da obstoječi izraz za trenutni pospešek pomnožimo na desni strani z ds/ds :

$$a = \frac{dv}{dt} \frac{ds}{ds}, \quad (2.15)$$

ker je množenje z ds/ds enako 1, nismo ničesar spremenili. Hitro opazimo, da lahko diferencialne preuredimo:

$$a = \frac{dv}{ds} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_v \quad (2.16)$$

in ugotovimo, da je ds/dt trenutna hitrost v ter nadaljujemo z izpeljavo¹⁵:

¹⁵Pomembno si je zapomniti uporabljen princip množenja z 1 v smeri odvisnosti, ki jo želimo (ds/ds), saj ga bomo pozneje še uporabili.

$$a = v \frac{dv}{ds}. \quad (2.17)$$

Nadaljujemo z ločevanjem spremenljivk in dodajanjem integracije ter integracijskih mej:

$$\int_{s_0}^{s_1} a \, ds = \int_{v_0}^{v_1} v \, dv. \quad (2.18)$$

in končno:

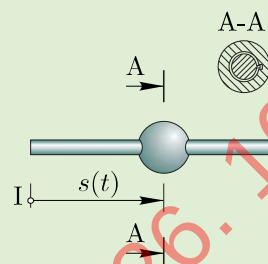
$$v(s_1) = v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2 \int_{s_0}^s a \, ds}. \quad (2.19)$$

Zgled 2.1.1

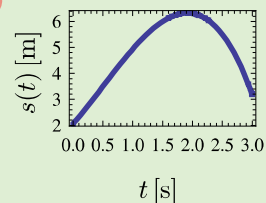
Na sliki 2.2 je prikazana krogla, ki se giblje glede na izraz: $s(t) = 2 \text{ m} + 3 t \text{ m/s} - 0,5 (t - 0,5 \text{ s})^3 \text{ m/s}^3$, kjer je s razdalja od izbranega izhodišča in t čas. Pri spodnjih vprašanjih se omejite na obdobje: $0 \text{ s} \leq t \leq 3 \text{ s}$

Določite:

1. Število prostostnih stopenj krogla na vodilu.
2. Lego pri $t = 1 \text{ s}$.
3. Absolutno vrednost najvišje hitrosti.
4. Čas t_0 , ko krogla miruje.
5. Kakšno pot opravi krogla do $t = 3 \text{ s}$.
6. Povprečno hitrost v prvih treh sekundah.
7. Pospešek pri $t = 0 \text{ s}$.



Slika 2.2



Slika 2.3

Rešitev

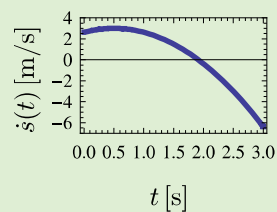
Najprej ugotovimo, da podano razdaljo v odvisnosti od časa $s(t)$ lahko hitro odvajamo po času in izpeljemo izraz za trenutno hitrost (2.7) v odvisnosti od časa:

$$v(t) = \dot{s} = 3 \text{ m/s} - 1,5 (t - 0,5 \text{ s})^2 \text{ m/s}^3$$

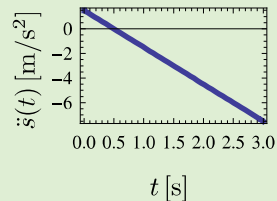
in z nadaljnim odvajanjem po času izpeljemo izraz za pospešek (2.7):

$$a(t) = \ddot{s} = -3 (t - 0,5 \text{ s}) \text{ m/s}^3.$$

Pot, hitrost in pospešek v odvisnosti od časa prikazujejo slike 2.3, 2.4 in 2.5. Opazimo, da se razdalja od izhodišča najprej povečuje, potem pa se začne zmanjševati. Hitrost je najprej pozitivna, nato ima maksimum, na koncu pa je negativna. Pospešek pa s časom linearno pada. Sedaj lahko odgovorimo na vprašanja.



Slika 2.4



Slika 2.5

1. Naloga vprašuje po prostostnih stopnjah krogla na vodilu na splošno. Odgovor je torej $P = 1$. Opomba: ker je pri nalogi lega $s(t)$ definirana, krogla dejansko nima prostostnih stopenj.

2. Lego pri $t = 1$ s izračunamo zelo preprosto: v izraz za $s(t)$ vstavimo ustrezen čas:

$$s(1 \text{ s}) = 4,9375 \text{ m}.$$

3. S slike 2.4 opazimo, da je največja pozitivna hitrost pri približno 0,5 s, da pa je negativna hitrost pri 3 s večja po amplitudi. Odgovor torej je:

$$v(3 \text{ s}) = -6,375 \text{ m/s}.$$

4. Krogla miruje, ko je hitrost $v(t)$ enaka 0 m/s:

$$v(t) = 3 \text{ m/s} - 1,5 (t - 0,5)^2 \text{ m/s}^3 = 0 \text{ m/s}$$

sledi:

$$t = \begin{cases} -0,914 \text{ s} \\ 1,914 \text{ s} \end{cases}$$

Možni sta torej dve rešitvi, ker nas zanima obdobje od 0 s do 3 s, je pravi odgovor: $t_3 = 1,91421 \text{ s}$.

5. Moramo biti pazljivi, naloga nas sprašuje po poti, ne po legi. Dokler se krogla ne ustavi, se giblje v pozitivno smeri, nato pa v negativno smeri. Sledi torej pot:

$$\begin{aligned} s_4 &= |s(t_3) - s(0 \text{ s})| + |s(3 \text{ s}) - s(t_3)| \\ &= (4,266 + 3,141) \text{ m} = 7,407 \text{ m}. \end{aligned}$$

Do istega rezultata bi prišli z integralom absolutne hitrosti po času: $\int_0^{3 \text{ s}} |v(t)| dt$.

6. Sledimo izrazu (2.2). Sprememba lege je:

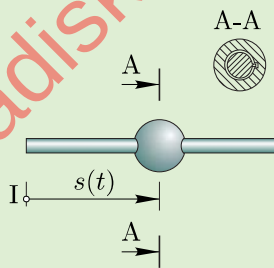
$$\Delta s = s(3 \text{ s}) - s(0 \text{ s}) = 3,18 \text{ m} - 2,06 \text{ m} = 1,125 \text{ m}.$$

Ker je sprememba časa $\Delta t = 3 \text{ s}$, sledi:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 0,375 \text{ m/s}.$$

7. Relativno preprosta rešitev:

$$a(0 \text{ s}) = 1,5 \text{ m/s}^2.$$



Slika 2.6

Zgled 2.1.2

Na sliki 2.6 je prikazana krogla s pospeškom $a = 3 \text{ m/s}^2$. Če gibanje začnemo spremljati pri legi $s_0 = 0 \text{ m}$ in hitrosti $v_0 = 2 \text{ m/s}$, potem določite:

1. Hitrost pri $s_1 = 1$ m.
2. Hitrost pri $t_1 = 1$ s.
3. Pot pri $t_1 = 1$ s.

Rešitev

Najprej ugotovimo, da je pospešek a konstanten.

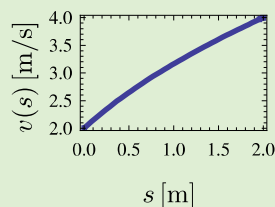
1. Glede na izraz $a = v dv/ds$ (2.17) izpeljemo:

$$\int_{s_0}^{s_1} a ds = \int_{v_0}^{v_1} v dv.$$

Sledi torej:

$$v(s_1) = v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2 \int_{s_0}^{s_1} a ds} = \sqrt{v_0^2 + 2a(s_1 - s_0)}.$$

Hitrost v odvisnosti od poti je prikazana na sliki 2.7. Iskana hitrost $v(s_1) = \sqrt{10} \text{ m/s} = 3,16 \text{ m/s}$.

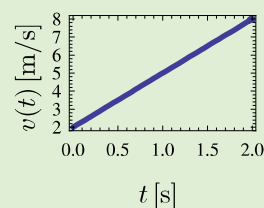


Slika 2.7

2. Izhajamo iz izraza $a = dv/dt$ (2.7) in izpeljemo:

$$v(t_1) = v_1 = v_0 + \int_{t_0}^{t_1} a dt = v_0 + a(t_1 - t_0).$$

Hitrost v odvisnosti od časa je prikazana na sliki 2.8. Iskana hitrost je: $v(t_1) = 5 \text{ m/s}$.



Slika 2.8

3. Ponovno izhajamo iz izraza $v = ds/dt$ (2.7), pri čemer za hitrost v uporabimo v prejšnji točki izpeljan izraz:

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = \int_{s_0}^{s_1} ds,$$

integracijska spremenljivka je t , zato sledi:

$$\int_{t_0}^{t_1} v_0 + a(t - t_0) dt = \int_{s_0}^{s_1} ds.$$

Sedaj integriramo:

$$v_0 t + a \left(\frac{t^2}{2} - t_0 t \right) \Big|_{t_0}^{t_1} = s \Big|_{s_0}^{s_1},$$

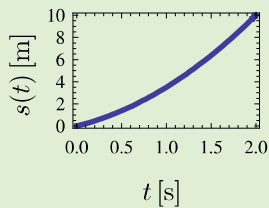
vstavimo meje in upoštevamo, da je $s_0 = 0$ m in $t_0 = 0$ s:

$$v_0 t_1 + a \frac{t_1^2}{2} = s_1,$$

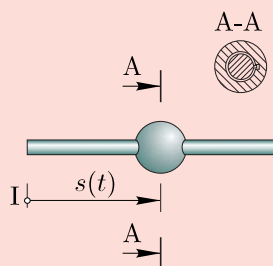
ker je t_1 lahko kateri koli čas t večji od 0 s, lahko zapišemo bolj splošno:

$$s(t) = v_0 t + a \frac{t^2}{2}.$$

Slika 2.9 prikazuje pot v odvisnosti od časa. Izračunati je treba še iskano pot: $s(t_1) = 3,5$ m.



Slika 2.9

**Naloga 2.1.1**

Na sliki je prikazana krogla, ki je nameščena na vodilo. Krogla se lahko giblje premočrtno vzdolž vodila, pri čemer njeno lego definira funkcija: $x(t) = a + bt^2$.

Podatki: $a = 3 \text{ m}$ $b = -4 \text{ m/s}^2$
 $T = 15,500 \text{ s}$

Vprašanja:

1. Kakšen je tip gibanja krogle? (1: premočrtni, 2: ravninski)

Odg: 1

2. Določite lego krogle pri času $t = T$.

Odg: 830 m

3. Določite hitrost krogle pri času $t = T$.

Odg: 151 m/s

4. Določite pospešek krogle pri času $t = T$.

Odg: 8 m/s^2

Naloga 2.1.2

Na sliki je prikazana krogla, ki je nameščena na vodilo. Krogla se lahko giblje premočrtno vzdolž vodila, pri čemer njeno lego definira funkcija: $x(t) = a + bt^3$.

Podatki: $a = -8,500 \text{ m}$ $b = 6,500 \text{ m/s}^3$
 $T = 11 \text{ s}$

Vprašanja:

1. Določite lego krogle pri času $t = T$.

Odg: $501 \times 10^8 \text{ m}$

2. Določite hitrost krogle pri času $t = T$.

Odg: $501 \times 10^8 \text{ m/s}$

3. Določite pospešek krogle pri času $t = T$.

Odg: 951 m/s^2

Naloga 2.1.3

Na sliki je prikazana krogla, ki je nameščena na vodilo. Krogla se lahko giblje premočrtno vzdolž vodila, pri čemer njeno lego definira funkcija: $x(t) = a + \sin(bt)$.

Podatki: $a = 5 \text{ m}$ $b = 27 \text{ rad/s}$ $T = 1 \text{ s}$

Vprašanja:

1. Določite lego krogle pri času $t = T$.

Odg: $330,3 \text{ m}$

2. Določite hitrost krogle pri času $t = T$.

Odg: $888,7 \text{ m/s}$

3. Določite pospešek krogle pri času $t = T$.

Odg: $801,700 \text{ m/s}^2$

Naloga 2.1.4

Na sliki je prikazano krogla, ki je nameščena na vodilo. Krogla se lahko giblje premočrtno vzdolž vodila, pri čemer njeno lego definira funkcija: $x(t) = a + bt^2 + ct^3$.

Podatki: $a = -2,500 \text{ m}$ $b = 3,500 \text{ m/s}^2$
 $c = 3,500 \text{ m/s}^3$ $T = 21 \text{ s}$

Vprašanja:

1. Določite lego krogle pri času T .

Odg: $501 \times 10^8 \text{ m}$

2. Določite hitrost krogle pri času T .

Odg: $501 \times 10^8 \text{ m/s}$

3. Določite pospešek krogle pri času T .

Odg: 844 m/s^2

Naloga 2.1.5

Na sliki je prikazana krogla, ki je nameščena na vodilo. Krogla se lahko giblje premočrtno vzdolž vodila pri čemer je poznan njen pospešek $a(t) = b$.

Podatki: $b = -10 \text{ m/s}^2$ $T = 16 \text{ s}$

Vprašanja:

1. Določite pospešek pri času $t = T$.

Odg: 01 m/s^2

2. Določite hitrost pri času $t = T$.

Odg: $0,01 - \text{ m/s}$

3. Določite pomik pri času $t = T$.

Odg: $8,01 \times 10^{-2} - \text{ m}$

4. Določite spremembo hitrosti med časom

$t = T/2$ in časom $t = T$.

5. Določite spremembo poti med časom

$t = T/2$ in časom $t = T$.

Odg: $0,8 - \text{ m/s}$

Odg: $0,09 - \text{ m}$

www.ladisk.si - reprodukcija ni dovoljena 26.10.2017

2.1.2 Ravninsko gibanje

Ime samo pove, da govorimo o gibanju točke v *ravnini*. Za enolično določitev lege take točke potrebujemo dve neodvisni spremenljivki (število prostostnih stopenj je $P = 2$).

Časovna odvisnost Podobno kot pri premočrtnem gibanju, si bomo najprej pogledali časovno odvisno dogajanje. Primer časovno definirane premočrtne kinematike je na sliki 2.10: v inercialnem okvirju I je prikazana točka, ki se lahko pomika v xy ravnini. Z $\mathbf{r}(t)$ je označena lega točke pri času t in z $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ lega pri času $t + \Delta t$. Če smo pri premočrtnem gibanju lego lahko opisali s skalarjem, je tukaj uporabljen dvorazsežen krajevni vektor $\mathbf{r}$.

Podobno kot pri premočrtnem gibanju z deljenjem *spremembe lege* $\Delta \mathbf{r}$ s spremembo časa Δt določimo *povprečno hitrost*; če smo bolj natančni gre za *vektor povprečne hitrosti*:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (2.20)$$

Ko končni čas Δt postane infinitezimalno kratek dt , postane tudi sprememba lege infinitezimalno majhna $d\mathbf{r}$ in lahko izračunamo *vektor trenutne hitrosti* $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (2.21)$$

in beremo: odvod krajevnega vektorja $\mathbf{r}$ po času t .

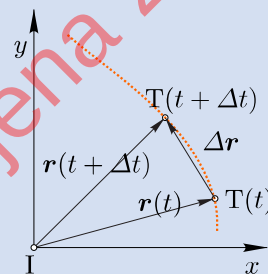
Na podoben način s pomočjo spremembe hitrosti $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$ izračunamo *vektor povprečnega pospeška* v nekem časovnem obdobju Δt :

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (2.22)$$

in *trenutni pospešek*:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}. \quad (2.23)$$

Ugotovimo lahko, da smo prišli do podobnih zaključkov kot pri enorazsežnem premočrtnem gibanju, vendar je dvorazsežen pristop predstavljen v tem poglavju bolj splošno;



Slika 2.10

še več, enostavno se ga lahko posploši v več razsežnosti. Za poljubno razsežen krajevni vektor torej velja:

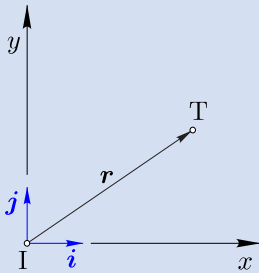
$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \quad \text{in} \quad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}}. \quad (2.24)$$

Z integracijo po času pa prehajamo v obratno smer:

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{a} \, dt = \int_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}_1} d\mathbf{v} \quad (2.25)$$

in:

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{v} \, dt = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} d\mathbf{r}. \quad (2.26)$$



Slika 2.11

¹⁶Kartezijski koordinatni sistem je leta 1637 vpeljal René Descartes (*1596, †1650) [8]. Ime kartezijskega sistema izhaja iz latinske oblike njegovega priimka: Cartesius.

2.1.3 Pravokotni ali kartezijski koordinatni sistem

V praksi najpogosteje uporabljeni koordinatni sistem je *pravokotni ali kartezijski*¹⁶ koordinatni sistem, slika 2.11. Pravokotni koordinatni sistem definirata dva pravokotna enotska vektorja $\mathbf{i}$ in $\mathbf{j}$. Enotska vektorja imata izhodišče inercialnega okvirja I in kot ime pove, imata dolžino enako 1: $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$. Pri tem je pomembno, da se enotska vektorja pravokotnega koordinatnega sistema s časom ne spreminjata (pozneje bomo videli, da to pri ostalih obravnavanih koordinatnih sistemih ni res). Če se vrnemo k sliki 2.11, potem krajevni vektor $\mathbf{r}$ do točke T zapišemo kot:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}. \quad (2.27)$$

Glede na temeljni izraz (2.24), lahko z odvajanjem izpeljemo hitrost:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt}. \quad (2.28)$$

Pri odvajanju izraza (2.28) ugotovimo, da je odvod konstantnega vektorja po času enak nič: $d\mathbf{i}/dt = d\mathbf{j}/dt = 0$. Sledi torej:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}. \quad (2.29)$$

Z nadaljnjim odvajanjem hitrosti po času izpeljemo trenutni pospešek $\mathbf{a}$.

Končno lahko zapišemo temeljni izraz:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} \quad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}. \quad (2.30)$$

2.1.4 Naravni koordinatni sistem

Če je bistvena lastnost pravokotnega koordinatnega sistema, da ga definirata *pravokotna* in konstantna enotska vektorja, potem je bistvena lastnost *naravnega koordinatnega sistema*, da ga definirata pravokotna enotska vektorja $\mathbf{e}_t$ in $\mathbf{e}_n$, ki se premikata z opazovano točko. Na sliki 2.12 je z oranžno prekinjeno črto prikazana trajektorija gibanja izbrane točke. Če gibanje opazujemo v točki T, potem tangenta t na trajektorijo gibanja definira smer tangentnega enotskega vektorja $\mathbf{e}_t$ (usmerjenost definira pozitivna hitrost v). Smer normalnega enotskega vektorja $\mathbf{e}_n$ je taka, da je pravokoten na tangentni enotski vektor $\mathbf{e}_t$, usmerjenost pa je taka, da kaže vektor $\mathbf{e}_n$ v smeri trenutnega pola hitrosti¹⁷ P. Infinitesimalno kratek čas pozneje se opazovana točka nahaja na mestu T', enotski krajevni vektorji pa so takrat $\mathbf{e}'_t, \mathbf{e}'_n$. Ker je med točkama T in T' potekel infinitesimalno majhen čas, točka še vedno kroži okoli istega pola hitrosti P in na istem polmeru r ; glede na pol P se je opazovana točka premaknila za infinitesimalni kot $d\vartheta$.

Vektor *trenutne tangentne hitrosti* v naravnem koordinatnem sistemu torej definiramo kot:

$$\mathbf{v} = v \mathbf{e}_t. \quad (2.31)$$

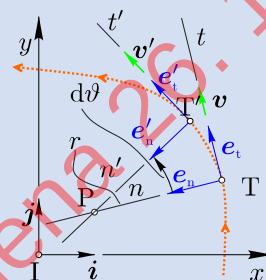
Skalar v je trenutna hitrost točke. Glede na definicijo naravnega koordinatnega sistema je to hkrati tudi velikost trenutne tangentne hitrosti. Hitrost v normalni smeri naravnega koordinatnega sistema je enaka nič. Ker je torej pri naravnem koordinatnem sistemu vsa hitrost v smeri tangente, lahko podobno kot pri premočrtnem gibanju (2.7), pot po trajektoriji izračunamo z integracijo trenutne hitrosti v po času:

$$s = \int_t v dt. \quad (2.32)$$

Podobno kot pri pravokotnem koordinatnem sistemu (2.28), trenutni pospešek glede na izraz (2.24) izpeljemo:

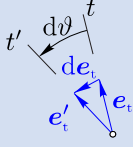
$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v} \mathbf{e}_t + v \dot{\mathbf{e}}_t. \quad (2.33)$$

Pri pravokotnem koordinatnem sistemu sta enotska vektorja $\mathbf{i}$ in $\mathbf{j}$ konstantna in njun odvod enak 0; pri naravnem koordinatnem sistemu pa se enotska vektorja premikata (v času) z opazovano točko in je torej odvod po času različen



Slika 2.12

¹⁷ Pol hitrosti je navidezno mirujoča točka, okoli katere v nekem trenutku opazovana točka/telo kroži (v kolikor se točka giblje premočrtno, je pol hitrosti v neskončnosti).



Slika 2.13

od 0. V izrazu (2.33) moramo torej določiti vektor $\dot{\mathbf{e}}_t$, ki je definiran kot:

$$\dot{\mathbf{e}}_t = \frac{d\mathbf{e}_t}{dt}. \quad (2.34)$$

Pomagamo si s sliko 2.13, kjer sta prikazana vektorja $\mathbf{e}_t$ in $\mathbf{e}_t'$ ter s sliko 2.12. Ker gre za diferencialno majhen pomik in ker je dolžina enotskega vektorja ena, velja:

$$d\mathbf{e}_t = 1 \cdot d\vartheta \cdot \mathbf{e}_n, \quad (2.35)$$

kjer je $1 \cdot d\vartheta$ velikost spremembe in $d\mathbf{e}_n$ smer spremembe. Pri tem smo zaradi infinitezimalno majhne spremembe kota $d\vartheta$ lahko predpostavili, da je smer enotskega vektorja $\mathbf{e}_n$ enaka smeri $d\mathbf{e}_t$.

Da dobimo odvod po času (2.34), moramo izraz (2.35) deliti z diferencialom časa dt :

$$\dot{\mathbf{e}}_t = \frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} \mathbf{e}_n = \dot{\vartheta} \mathbf{e}_n. \quad (2.36)$$

Vstavimo izraz za $\dot{\mathbf{e}}_t$ v izraz za pospešek v naravnem koordinatnem sistemu 2.33:

$$\mathbf{a} = \dot{v} \mathbf{e}_t + v \dot{\vartheta} \mathbf{e}_n. \quad (2.37)$$

Izraz (2.37) nam še ni povsem všeč, saj kotna hitrost $\dot{\vartheta}$ ni veličina, ki je ponavadi poznana. S slike 2.12 opazimo, da s pomočjo polmera kroženja r in kotne hitrosti $\dot{\vartheta}$ lahko definiramo trenutno tangentno hitrost: $v = r \dot{\vartheta}$.

Ker velja $\dot{\vartheta} = v/r$, sledi temeljni izraz:

$$\mathbf{a} = \underbrace{\dot{v}}_{a_t} \mathbf{e}_t + \underbrace{\frac{v^2}{r}}_{a_n} \mathbf{e}_n, \quad (2.38)$$

kjer smo z a_t označili tangentni in z a_n normalni pospešek.

Velikost¹⁸ pospeška pa je definirana kot:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}. \quad (2.39)$$

2.1.5 Polarni koordinatni sistem

Poleg pravokotnega in naravnega koordinatnega sistema se pogosto uporablja še *polarni ali radialni koordinatni sistem*. Pri polarnem koordinatnem sistemu gibanje točke opišemo z enotskima krajevnima vektorjema, ki se vrtita glede na izhodišče inercialnega okvirja I, slika 2.14.

¹⁸Opomba: o *velikosti* govorimo takrat kadar govorimo o velikosti vektorske veličine.

Smer radialnega enotskega krajevnega vektorja $\mathbf{e}_r$ je definirana s premico skozi izhodišče I in opazovano točko T, usmerjenost pa je vedno pozitivna stran od izhodišča. Smer krožnega enotskega krajevnega vektorja $\mathbf{e}_\varphi$ je pravokotna na radialni enotski vektor, usmerjenost pa je pozitivna v nasprotni smeri urinega kazalca, slika 2.14. S pomočjo enotskih vektorjev pravokotnega koordinatnega sistema $\mathbf{i}$ in $\mathbf{j}$ in kota φ ¹⁹ lahko enotske vektorja polarne koordinatnega sistema zapišemo kot (slika 2.15):

$$\mathbf{e}_r = +\mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi \quad (2.40)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi. \quad (2.41)$$

Če je znana razdalja r od izhodišča I do točke T, potem je krajevni vektor do točke T definiran kot:

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r. \quad (2.42)$$

Trenutno hitrost izpeljemo tako, da krajevni vektor $\mathbf{r}$ odvajamo po času (2.24):

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r. \quad (2.43)$$

Za nadaljevanje je treba izpeljati izraz²⁰ za $\dot{\mathbf{e}}_r$:

$$\dot{\mathbf{e}}_r = -\dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{i} + \dot{\varphi} \cos \varphi \mathbf{j} \quad (2.44)$$

in ugotovimo:

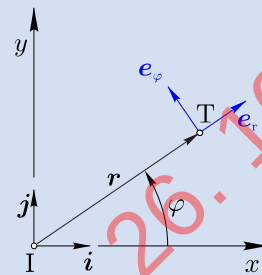
$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad (2.45)$$

Nadaljujemo z izpeljavo hitrosti (2.43):

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \underbrace{\dot{r}}_{v_r} \mathbf{e}_r + \underbrace{r \dot{\varphi}}_{v_\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad (2.46)$$

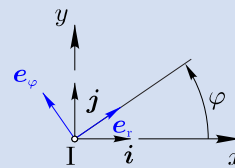
kjer je v_r radialna hitrost, v_φ pa krožna hitrost. Velikost hitrosti je torej:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2}. \quad (2.47)$$



Slika 2.14

¹⁹ Poudariti je treba, da φ meri kot v protismeri od obsece x do premice, ki gre skozi točki I in T.



Slika 2.15

²⁰ Kotno hitrost $\dot{\varphi}$ pogosto označimo tudi z ω .

²¹Kotni pospešek $\ddot{\varphi}$ pogosto označimo tudi z α .

Sedaj nas zanima še trenutni pospešek v polarnem koordinatnem sistemu; izraz (2.46) torej odvajamo po času²¹:

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r} \mathbf{e}_r + \dot{r} \dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + r (\ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{\varphi} \dot{\mathbf{e}}_\varphi). \quad (2.48)$$

Podobno kot zgoraj (2.44) izpeljemo izraz $\dot{\mathbf{e}}_\varphi$:

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\mathbf{i} \dot{\varphi} \cos \varphi + -\mathbf{j} \dot{\varphi} \sin \varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r \quad (2.49)$$

in nadaljujemo z izpeljavo pospeška (2.48):

$$\mathbf{a} = \ddot{r} \mathbf{e}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{r} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi - r \dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_r. \quad (2.50)$$

Preostane samo še urejanje izraza:

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \underbrace{(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2)}_{a_r} \mathbf{e}_r + \underbrace{(2 \dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi})}_{a_\varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad (2.51)$$

Kjer je z a_r označen radialni, z a_φ pa krožni pospešek. Velikost pospeška je torej:

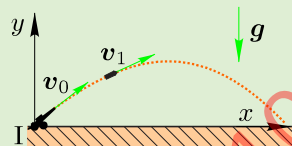
$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2}. \quad (2.52)$$

Opomba: člena krožnega pospeška a_φ pogosto tudi poimenujemo; $2 \dot{r} \dot{\varphi}$ je *Coriolisov pospešek*, $r \ddot{\varphi}$ pa *centrifugalni pospešek*. Coriolisov pospešek je navidezni pospešek, ki se pojavi samo v relativnem koordinatnem sistemu.

Zgled 2.1.3

Na sliki 2.16 je prikazano gibanje izstrelka, ki je izpostavljen zgolj težnostnemu pospešku (zračni upor zanemarimo). Znan je začetna hitrost $\mathbf{v}_0$.

Podatki: $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \end{pmatrix}$, $v_{x0} = 10 \text{ m/s}$, $v_{y0} = 20 \text{ m/s}$,
 $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $t_1 = 1 \text{ s}$, $y_1 = 10 \text{ m}$



Slika 2.16

Določite:

1. Število prostostnih stopenj izstrelka.
2. Hitrost pri t_1 .
3. Pot pri t_1 .
4. Vertikalno hitrost pri višini y_1 .

Rešitev

Gre za relativno preprosto nalogo, kjer se izstrelak (ima lastnosti točke) v začetku ($t_0 = 0 \text{ s}$) giblje z začetno vektorsko hitrostjo $\mathbf{v}_0$. Med gibanjem je izstrelak izpostavljen gravitacijskemu pospešku v vertikalni smeri. Naloga je definirana v pravokotnem kartezijevem koordinatnem sistemu; izkazalo se bo, da je za vprašanje 3 bolj primeren naravni koordinatni sistem.

1. Izstrelak se giblje v ravnini in ima glede na definicijo naloge²² dve prostostni stopnji ($P = 2$). Lego izstrelka tako lahko enolično opišemo z dvema neodvisnima spremenljivkama (npr. x, y).
2. Ugotovimo, da na izstrelak deluje zgolj težnostni pospešek v y smeri:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

in z integracijo po času (2.24) izpeljemo:

$$\int_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}_1} d\mathbf{v} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{a} dt.$$

²²Ker obravnavamo telo zanemarljive dimenzije – točko, ni rotacijskih prostostnih stopenj.

Sledi:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t_1) = \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} t_1 &= \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} - g t_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 \\ 10,19 \end{pmatrix} \text{ m/s.} \end{aligned}$$

3. Gre za zahtevnejše vprašanje, saj nas ne zanima lega v x ali y smeri, kar bi lahko izračunali z enostavnim integriranjem (po komponentah) izraza za hitrost. Zanima nas pot, ki jo opravi izstrelek, torej dolžina trajektorije. To lahko izračunamo tako, da uporabimo *naravni koordinatni sistem*. Naravni koordinatni sistem ima namreč vso hitrost v smeri tangente $\mathbf{v}_t$ na trajektorijo in nič hitrosti v normalni smeri. Z integriranjem hitrosti $\mathbf{v}_t$ pa izračunamo pot (2.7). Najprej torej definirajmo absolutno hitrost (glede na prejšnji odgovor):

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{x0}^2 + (v_{y0} - g t)^2}$$

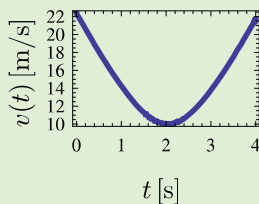
in jo prikažimo na sliki 2.17.

Nadaljujemo $v = ds/dt$ in izpeljemo²³:

$$\begin{aligned} s(t_1) = s_1 &= s_0 + \int_{t_0}^{t_1} v dt \\ &= s_0 + \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{v_{x0}^2 + (v_{y0} - g t)^2} dt \\ &= \frac{(g t_1 - v_{y0}) A}{2 g} \\ &\quad - \frac{v_{x0}^2}{2 g} \log(A - g t_1 + v_{y0}) \\ &\quad + \frac{v_{y0}}{2 g} \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2} \\ &\quad + \frac{v_{x0}^2}{2 g} \log\left(\sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2} + v_{y0}\right) \\ &= 18,176 \text{ m.} \end{aligned}$$

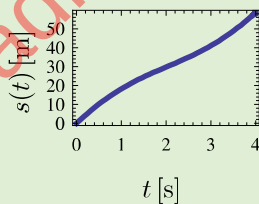
Kjer je $A = \sqrt{g^2 t_1^2 - 2 g t_1 v_{y0} + v_{x0}^2 + v_{y0}^2}$. Pot $s(t)$ je prikazana na sliki 2.18.

4. Ker potrebujemo odvisnost hitrosti od poti, začnemo z izvajanjem pri izrazu (2.24) $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ in ga zapišemo



Slika 2.17

²³Zahtevnostna raven spodnjega integrala presega okvir tega učbenika; v praksi ga rešimo s pomočju programov za simbolično reševanje ali poiščemo numerično rešitev.



Slika 2.18

samo za komponento y :

$$a_y = -g = \frac{dy}{dt}.$$

Nadaljujemo podobno kot pri izrazu (2.17):

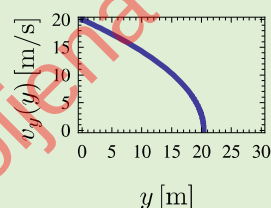
$$-g = \frac{dy}{dt} \frac{dy}{dy} = \dot{y} \frac{dy}{dy}.$$

Sledi:

$$\int_{v_{y0}}^{v_{y1}} \dot{y} dy = \int_{y_0}^{y_1} -g dy.$$

Zanima nas samo y smer, zato sledi (slika 2.19):

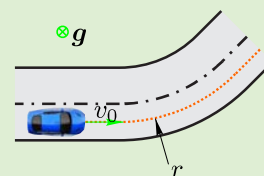
$$v_{y1} = \sqrt{v_{y0}^2 - 2gy_1} = 14,2759 \text{ m/s}.$$



Slika 2.19

Zgled 2.1.4

Na sliki 2.20 je prikazan avtomobil, ki vozi skozi ovinek; za namen te naloge avtomobil poenostavimo s točko. Slika kaže, da težnostni pospešek deluje v vertikalni smeri, avtomobil pa se giblje po horizontalni ravnini. V začetku ovinka ima avtomobil hitrost v_0 ; voznik lahko ovinek prevozi po polmeru r .



Slika 2.20

Podatki: $v_0 = 30 \text{ m/s}$, $a = 2g$, $r = 100 \text{ m}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $t_1 = 1 \text{ s}$, $s_1 = 50 \text{ m}$.

Določite:

1. Tangentni pospešek avtomobila pri vožnji s konstantno hitrostjo v_0 skozi ovinek polmera r .
2. Normalni pospešek avtomobila pri vožnji s konstantno hitrostjo v_0 skozi ovinek polmera r .
3. Če avtomobil pospešuje s pospeškom a , potem izračunajte hitrost pri času t_1 .
4. Če avtomobil pospešuje s pospeškom a , potem izračunajte hitrost, ko prevozi pot s_1 .
5. Če avtomobil pospešuje s pospeškom a , potem izračunajte velikost pospeška, ko prevozi pot s_1 .

Rešitev

Naloga je relativno preprosta, gre za pogost primer v praksi. Normalni in tangentni pospeški nas lahko zanimajo zaradi udobja potnikov, preučevanja zdrsa . . .

Sicer pa gre za nalogo, pri kateri je uporaba naravnega koordinatnega sistema očitna; podatke o vožnji namreč v praksi merimo znotraj avtomobila. Hitrost avtomobila je v določenem trenutku tangenta na trajektorijo gibanja.

1. Gre za trivialno vprašanje: če se vozilo giblje s konstantno hitrostjo, potem je tangentni pospešek enak nič. Za podrobnosti glejte (2.38).
2. Uporabimo temeljni izraz (2.38) in definicijo normalnega pospeška:

$$a_n = \frac{v_0^2}{r} = 9 \text{ m/s}^2.$$

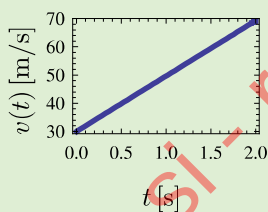
3. Ker avtomobil sedaj pospešuje (avtomobil lahko pospešuje samo v smeri trajektorije, torej tangente), velja $a_t = a = 2g = dv/dt$ (2.7). Poudariti velja, da dogajanje spremljamo vzdolž tangentne koordinatne osi naravnega koordinatnega sistema (ne vektorsko!). Z integracijo in vstavitvijo mej:

$$\int_{t_0}^{t_1} 2g \, dt = \int_{v_0}^{v_1} dv$$

izpeljemo:

$$v(t_1) = v_0 + 2g t_1 = 49,62 \text{ m/s}.$$

Hitrost pri pospešenem gibanju v odvisnosti od časa prikazuje slika 2.21.

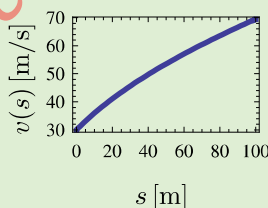


Slika 2.21

4. Za izračun hitrosti v odvisnosti od poti po trajektoriji moramo časovno odvisnost hitrosti (prejšnje vprašanje) preurediti na krajevno odvisnost; pri tem nas zanima samo tangentna komponenta in si zato pomagamo z izrazom (2.17) $a = v \, dv/ds$:

$$\begin{aligned} v(s_1) = v_1 &= \sqrt{v_0^2 + 2 \int_{s_0}^{s_1} a \, ds} \\ &= 53,498 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali $s_0 = 0 \text{ m}$. Hitrost v odvisnosti od poti je prikazana na sliki 2.22.



Slika 2.22

5. Glede na izraz (2.38) je velikost pospeška definirana kot:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \\ &= \sqrt{(2g)^2 + \left(\frac{v(s_1)^2}{r}\right)^2} \\ &= 34,7 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Zgled 2.1.5

Na sliki 2.23 je prikazana krogla, ki se lahko giblje vzdolž vodila. Lego krogle podaja razdalja od vrtišča do težišča mase definira $r(t)$ in kot $\varphi(t)$ med vodilom in osjo x . Kroglo poenostavimo s točko.

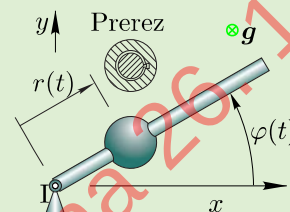
Podatki: $t_1 = 1 \text{ s}$

$$r(t) = 0,1 \text{ m} + 2t^3 \text{ m/s}^3,$$

$$\varphi(t) = 1t \text{ rad/s} + 2t^2 \text{ rad/s}^2,$$

Določite:

1. Radialno hitrost pri času t_1 .
2. Velikost hitrosti pri času t_1 .
3. Krožni pospešek pri času t_1 .
4. Velikost pospeška pri času t_1 .



Slika 2.23

Rešitev

1. Glede na izraz (2.46), velja:

$$v_r(t_1) = \dot{r}(t_1) = 6t_1^2 \text{ m/s}^3 = 6 \text{ m/s}.$$

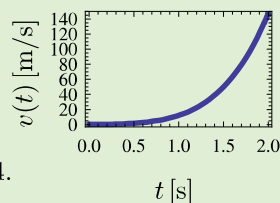
2. Da določimo velikost hitrosti, moramo določiti še krožno hitrost:

$$\begin{aligned} v_\varphi(t_1) &= r(t_1) \dot{\varphi}(t_1) \\ &= (0,1 \text{ m} + 2t_1^3 \text{ m/s}^3) (1 \text{ rad/s} + 4t_1 \text{ rad/s}^2) \\ &= 10,5 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Sledi določitev velikost hitrosti:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = 12,093 \text{ m/s}.$$

Časovno odvisna velikost hitrosti je prikazana na sliki 2.24.



Slika 2.24

3. Glede na izraz (2.51) sledi krožni pospešek:

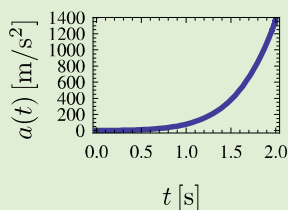
$$\begin{aligned} a_{\varphi} &= 2\dot{r}(t_1)\dot{\varphi}(t_1) + r(t_1)\ddot{\varphi}(t_1) \\ &= 12\text{ m/s}^3 t_1^2 (1\text{ rad/s} + 4\text{ rad/s}^2 t_1) + \\ &\quad (0,1\text{ m} + 2\text{ m/s}^3 t_1^3) 4\text{ rad/s}^2 \\ &= 68,4\text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

4. Za velikost pospeška moramo najprej izračunati še radialni pospešek:

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r}(t_1) - r(t_1)\dot{\varphi}(t_1)^2 \\ &= 12\text{ m/s}^3 t_1 - \\ &\quad (0,1\text{ m} + 2\text{ m/s}^3 t_1^3) (1\text{ rad/s} + 4\text{ rad/s}^2 t_1)^2 \\ &= -40,5\text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Sledi velikost pospeška:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_{\varphi}^2} = 79,491\text{ m/s}^2.$$

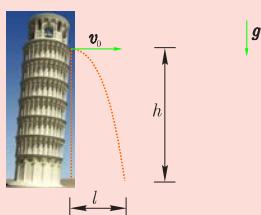


Slika 2.25

Velikost pospeška v odvisnosti od časa je prikazana na sliki 2.25. Tako pri velikosti hitrosti, kot pri velikosti pospeška opazimo, da s časom hitro naraščata.

Naloga 2.1.6

Odločili ste se, da boste numerično preverili Galilejev eksperiment na poševnem stolpu v Pisi. Dve krogli, prva mase m_1 in druga mase m_2 , spustite z višine h . Prvo kroglo spustite, da pade vertikalno, drugo pa v horizontalni smeri s hitrostjo v_0 . Višina spusta je h (zračni upor zanemarite).



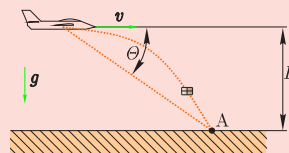
Podatki: $m_1 = 2 \text{ kg}$ $m_2 = 0,750 \text{ kg}$
 $v_0 = 23 \text{ m/s}$ $h = 50 \text{ m}$ $g = 9,810 \text{ m/s}^2$

Vprašanja:

1. Kakšen je tip gibanja druge krogle? (1: premočrtni, 2: ravninski)
Odg: 2
2. Koliko časa pada prva krogla?
Odg: 3,19 s
3. Koliko časa pada druga krogla?
Odg: 3,19 s
4. Določite razdaljo l .
Odg: 51,87 m
5. Kolikšna je absolutna hitrost padca prve krogle?
Odg: 31,18 m/s
6. Kolikšna je ob padcu absolutna hitrost druge krogle?
Odg: 32,88 m/s

Naloga 2.1.7

Pilot letala bi rad odvrnil paket na točko A. Določite kot θ med direktno in horizontalno linijo v trenutku, ko mora pilot izpustiti paket. Zanemarite zračni upor.



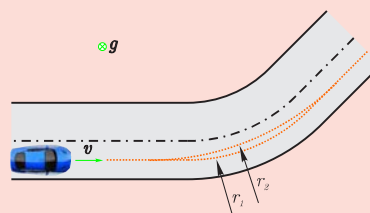
Podatki: $H = 200 \text{ m}$ $v = 240 \text{ km/h}$
 $g = 9,810 \text{ m/s}^2$

Vprašanja:

1. Določite hitrost letala v osnovnih enotah.
Odg: 66,67 m/s
2. Koliko prostostnih stopenj ima paket?
Odg: 2
3. Določite čas padanja paketa.
Odg: 6,39 s
4. Koliko metrov pred točko A mora pilot izpustiti paket?
Odg: 107,55 m
5. Kolikšen je kot θ ?
Odg: 31,35 °

Naloga 2.1.8

Avtomobil na sliki se s konstantno hitrostjo v približuje ovinku. Označeni sta dve sledi vožnje skozi ovinek, prva po krivini s polmerom r_1 in druga po krivini s polmerom r_2 .



Podatki: $v = 97 \text{ km/h}$ $r_1 = 70 \text{ m}$
 $r_2 = 86 \text{ m}$ $a_1 = 3,250 \text{ m/s}^2$

Vprašanja:

1. Kolikšna je hitrost avtomobila v osnovnih enotah?
Odg: 26,93 m/s

2. Kakšen je normalni pospešek na voznika, če avtomobil pelje po krivini s polmerom r_1 ?

Odg: $178,01 \text{ m/s}^2$

3. Kakšen je normalni pospešek na voznika, če avtomobil pelje po krivini s polmerom r_2 ?

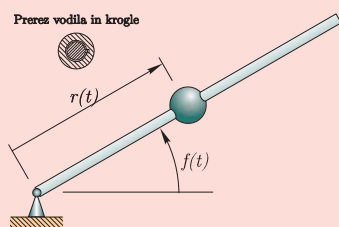
Odg: $544,8 \text{ m/s}^2$

4. V ovinku voznik nenadoma pritisne na zavoro, ki povzroči pojemek a_1 v smeri vožnje. Določite absolutni pospešek na voznika (za krivino r_2).

Odg: $240,9 \text{ m/s}^2$

Naloga 2.1.9

Krogla se lahko po vodilu premika brez trenja. Nagib vodila definira kot $f(t) = a + bt + ct^2$, razdaljo krogle od vrlišča pa $r(t) = dt^3$.



Podatki: $a = -1,650 \text{ rad}$ $b = 5 \text{ rad/s}$
 $c = -7 \text{ rad/s}^2$ $d = 0,900 \text{ m/s}^3$ $T = 2,900 \text{ s}$

Vprašanja:

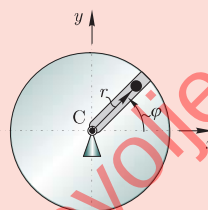
- Določite kot $f(t)$ pri času T .
Odg: $050,24 \text{ rad}$
- Določite razdaljo $r(t)$ pri času T .
Odg: $059,15 \text{ m}$
- Določite radialno hitrost pri času T .
Odg: $707,55 \text{ m/s}$
- Določite krožno hitrost pri času T .
Odg: $151,187 \text{ m/s}$
- Določite radialni pospešek pri T .
Odg: $501 \times 108,75 \text{ m/s}^2$

6. Določite krožni pospešek pri T .

Odg: $501 \times 159,1 \text{ m/s}^2$

Naloga 2.1.10

Kolut se vrti na mestu. Zasuk je podan z $\varphi(t) = a + bt^2$. Radialni pomik zatiča je podan z $r(t) = ct^3$.



Podatki: $a = 2,800 \text{ rad}$ $b = 10 \text{ rad/s}^2$
 $c = 7 \text{ m/s}^3$ $T_1 = 1,100 \text{ s}$ $\Theta_2 = 230^\circ$
 $T_3 = 0,300 \text{ s}$

Vprašanja:

- Kateri koordinatni sistem je uporabljen za popis lege zatiča? (1: kartezijev, 2: polarni)

Odg: 2

- Določite radialno hitrost $v_{n,1}$ ob času T_1 .

Odg: $v_{n,1} = 011,55 \text{ m/s}$

- Pretvorite zasuk Θ_2 v radiane.

Odg: $\Theta_{2,rad} = 404,4 \text{ rad}$

- Po kolikšnem času T_2 znaša zasuk $\varphi = \Theta_2$?

Odg: $T_2 = 818,0 \text{ s}$

- Določite krožni pospešek $a_{k,2}$ ob zasuku $\varphi = \Theta_2$.

Odg: $a_{k,2} = 224,11 \text{ m/s}^2$

- Določite absolutno vrednost hitrosti v_3 ob času T_3 .

Odg: $v_3 = 105,5 \text{ m/s}$

- Določite hitrost zatiča v smeri x ob času T_3 .

Odg: $v_{x,3} = 500,1 \text{ m/s}$

2.2 Kinetika masne točke

V nasprotju s kinematiko točke, ki obravnava gibanje točke (poglavje 2.1), se tukaj sprašujemo, zakaj se določena točkovna masa sploh giblje. Kot ime pove, še vedno ostajamo pri telesu z neskončno majhnim premerom (točka), ki pa ima znano maso m .

2.2.1 Gibalna količina

Na sliki 2.26 je tako prikazana masna točka m , ki se giblje s hitrostjo $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$. Množenje obeh veličin, torej mase m in hitrosti $\mathbf{v}$, definira *gibalno količino*²⁴:

$$\mathbf{p} = m \dot{\mathbf{r}}. \quad (2.53)$$

²⁴ang. *linear momentum*

Če na masno točko začne v nekem trenutku delovati sila $\mathbf{F}$ (slika 2.27), potem ta povzroči spremembo gibanja. Pomembno je poudariti, da je sila (tudi moment/navor) *vzrok*, sprememba gibanja pa *posledica*!

Da pravilno ločimo vzroke od posledic, si pomagamo s t. i. *diagram prostega telesa*²⁵. Diagram prostega telesa narišemo tako, da preučevano telo izrežemo iz okolice in narišemo vse sile in momente (vzroke), ki delujejo na telo. Treba je poudariti, da ne rišemo posledičnih kinematičnih veličin (hitrost, pospešek) in kinematično definiranih sil (npr. vztrajnostnih sil). Za primer na sliki 2.27, je diagram prostega telesa prikazan na sliki 2.28.

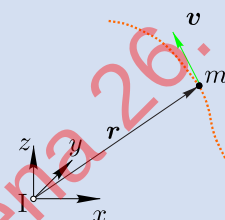
Če se vrnemo nazaj na gibalno količino (2.53): sila, ki deluje na masno točko, spremeni njeno gibanje; bolj točno, spremeni gibalno količino masne točke. Dlje časa, ko sila deluje, bolj jo spremeni. Vpliv sile na gibalno količino je prvi pravilno raziskal Isaac Newton, ki je ugotovil:

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}. \quad (2.54)$$

Če je torej vsota vseh sil na masno točko enaka nič, se gibalna količina ohranja. Ta sklep imenujemo tudi *zakon o ohranitvi gibalne količine*.

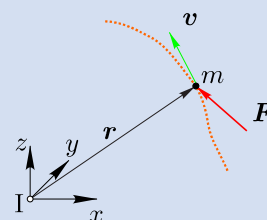
Z izpeljavo lahko nadaljujemo (2.53):

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{dm}{dt} \mathbf{v} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (2.55)$$

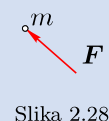


Slika 2.26

²⁵ang. *Free-Body Diagram*



Slika 2.27



Slika 2.28

²⁶Pri dinamiki tekočin, se bo obravnavana masa spreminjala.

če se masa m s časom ne spreminja²⁶, sledi $dm/dt = 0$:

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} = m \dot{\mathbf{v}} = m \mathbf{a}. \quad (2.56)$$

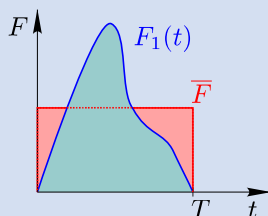
S tem smo v bistvu izpeljali *II. Newtonov zakon* (opomba: sila $\mathbf{F}$ lahko predstavlja tudi vsoto vseh sil, ki delujejo na masno točko).

Po drugi strani pa lahko izraz (2.54) integriramo:

$$\int \mathbf{F} dt = \int d\mathbf{p}, \quad (2.57)$$

kjer levi del izraza imenujemo *impulz sile* (ali tudi *sunek sile*) in označimo $\mathbf{I} = \int \mathbf{F} dt$, desni del pa označuje spremembo gibalne količine $\Delta\mathbf{p} = \int d\mathbf{p}$. Sledi izraz, katerega imenujemo *impulzni stavek*:

$$\mathbf{I} = \Delta\mathbf{p}. \quad (2.58)$$



Slika 2.29

Impulzni stavek lahko uporabimo takrat, kadar natančni časovni podatki niso znani, vemo pa stanje pred in po dogodku.

Kot primer lahko izpostavimo trk dveh teles: na sliki 2.29 je z $F_1(t)$ prikazana trčna sila, ki deluje med telesi in jo je relativno težko izmeriti. Relativno enostavno pa lahko izmerimo čas trka T (merimo lahko trajanje sklenjene električne zanke) in hitrosti pred in po trku (npr. prek ohranitve mehanske energije). Sledi, da lahko ocenimo spremembo gibalne količine Δp ; ker je sprememba gibalne količine enaka impulzu sile $I = \Delta p$, lahko ocenimo povprečno velikost sile $\bar{F} = I/T$.

2.2.2 Vrtilna količina

Ponovno se vrnimo k sliki 2.27. Poleg gibalne količine ima masna točka še *vrtilno količino*²⁷:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (2.59)$$

in je definirana kot vektorski produkt (glejte poglavje 5.3.4) krajevnega vektorja $\mathbf{r}$ in gibalne količine $\mathbf{p}$.

Tu moramo poudariti, da kljub imenu "vrtilna" ni potrebe, da se karkoli "vrtili"; tudi translatorno gibanje masne točke ima lahko vrtilno količino večjo od nič.

²⁷ang. *angular momentum*

Nadalje, je treba izpostaviti, da je vrtilna količina odvisna od izhodišča izbranega koordinatnega sistema. Če si za primer pogledamo stanje na sliki 2.30, kjer sta prikazana dva inercialna koordinatna sistema (I_1 in I_2), v katerih opazujemo gibanje masne točke mase m . Ne glede na izbrani koordinatni sistem sta sila $\mathbf{F}$ in hitrost $\mathbf{v}$ enaki. V obeh koordinatnih sistemih je enaka tudi gibalna količina; ker pa je krajevni vektor v prvem koordinatnem sistemu enak $\mathbf{r}_1$, v drugem pa $\mathbf{r}_2$, je vrtilna količina v koordinatnih sistemih različna.

Podobno kot pri gibalni količini, si pogledjmo spremembo vrtilne količine v času:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \quad (2.60)$$

$$= \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} \quad (2.61)$$

$$= \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}}. \quad (2.62)$$

V izrazu (2.62) lahko opazimo vektorski produkt $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}$; ker gre za vektorski produkt enakih vektorjev, je rezultat vedno enak 0.

V izrazu (2.62) naprej opazimo, da je člen $m\ddot{\mathbf{r}}$ glede na II. Newtonov zakon (2.56) enak sili $\mathbf{F}$, sledi:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (2.63)$$

Iz statike vemo, da je $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ definicija momenta:

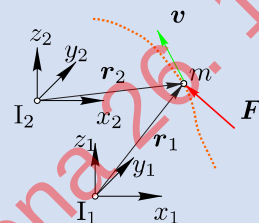
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (2.64)$$

ki deluje na masno točko. Izpeljali smo torej, da moment na masno točko spremeni (v času) vrtilno količino. Ker je vzrok moment, *spremembo vrtilne količine* zapišemo:

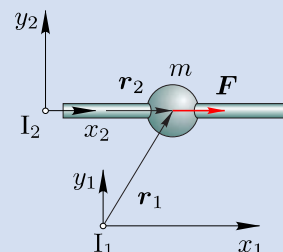
$$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}}. \quad (2.65)$$

Če je torej vsota vseh momentov na masno točko enaka nič, potem se vrtilna količina ohranja (glede na izbrano koordinatno izhodišče). Ta sklep imenujemo tudi *zakon o ohranitvi vrtilne količine*.

Kot za vrtilno količino, velja enako tudi za spremembo vrtilne količine: oboje velja samo za izbrani inercialni koordinatni sistem. To je nazorno prikazano na sliki 2.31, kjer se masna točka giblje vzdolž linearne vodila in nanjo deluje sila $\mathbf{F}$. V koordinatnem sistemu I_1 je moment $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}$ na

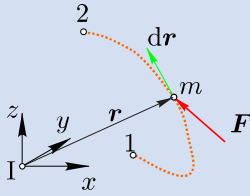


Slika 2.30



Slika 2.31

masno točko različen od nič in se torej vrtilna količina spreminja. V koordinatnem sistemu I_2 pa je moment $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}$ na masno točko enak nič (ker ni ročice) in se torej vrtilna količina ne spreminja oz. je konstantna. Mogoče je ta ugotovitev sprva presenetljiva, vendar izhaja iz dejstva, da je vrtilna količina definirana v izbranem inercialnem koordinatnem sistemu.



Slika 2.32

²⁸Sila $\mathbf{F}$ je na splošno vsota vseh sil, ki delujejo na masno točko.

V kolikor namesto sile obravnavamo moment M , je mehansko delo momenta pri zasuku φ definirano z:

$$W_{12} = \int_1^2 M d\varphi.$$

2.2.3 Energijske razmere

Predstavljajmo si situacijo prikazano na sliki 2.32, kjer sila $\mathbf{F}$ deluje na masno točko mase m , ki se v diferencialno majhnem času premakne za $d\mathbf{r}$; kjer je $\mathbf{r}$ krajevni vektor definiran v inercialnem koordinatnem sistemu I .

Mehansko delo sile²⁸ $\mathbf{F}$ na poti od točke 1 do 2 je definirano kot:

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} \quad (2.66)$$

Zgornji integral skalarnega produkta (poglavje 5.3.3) lahko z uporabo naravnega koordinatnega sistema (poglavje 2.1.4) zapišemo v obliko:

$$W_{12} = \int_1^2 F_t ds, \quad (2.67)$$

kjer je F_t tangentska komponenta sile $\mathbf{F}$ in ds diferencial pomika v smeri tangente. Z uporabo II. Newtonovega zakona (2.56) lahko zapišemo $F_t = m a_t$, sledi:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 m a_t ds = \int_1^2 m \frac{dv_t}{dt} ds \\ &= \int_{v_{t1}}^{v_{t2}} m \frac{ds}{dt} dv_t = \int_1^2 m v_t dv_t \\ &= \frac{1}{2} m v_t^2 \Big|_{v_{t1}}^{v_{t2}} = \frac{1}{2} m (v_{t2}^2 - v_{t1}^2) \\ &= \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \\ &= \frac{1}{2} m (|\mathbf{v}_2|^2 - |\mathbf{v}_1|^2), \end{aligned} \quad (2.68)$$

kjer smo upoštevali, da je pri naravnem koordinatnem sistemu tangentska hitrost v_t enaka velikosti hitrosti v , ki pa jo lahko (neodvisno od izbranega koordinatnega sistema)

zapišemo kot $v = |\mathbf{v}|$. Izpeljava (2.68) poveže delo sile na poti s spremembo hitrosti med začetno in končno točko. Gre za pomembno izpeljavo in z vpeljavo *kinetične energije*:

$$E_k = \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{r}}|^2, \quad (2.69)$$

lahko delo na poti zapišemo tudi:

$$W_{12} = E_{k_2} - E_{k_1}. \quad (2.70)$$

Treba je poudariti, da zgornja enačba poveže delovanje vsote poljubnih zunanjih sil s hitrostjo masne točke. V nadaljevanju si bomo podrobneje pogledali zunanje sile in kako jih lahko povežemo z energijami.

Poleg kinetične energije obstaja še veličina, ki jo imenujemo potencialna energija E_p . Teoretično gledano, je potencialna energija krajevno definirana skalarna funkcija $E_p(\mathbf{r})$, katere gradient (poglavje 5.3.2) je sila $\mathbf{F}$, ki deluje na masno točko [9]:

$$\mathbf{F} = -\nabla E_p(\mathbf{r}). \quad (2.71)$$

Razlog za ime potencialna energija oz. potencial sledi iz dejstva, da delo W_{12} , ki ga opravi potencialna sila, ni odvisno od izbrane poti, pač pa samo od začetne in končne lege (razlike potencialov). Posledično je delo potencialne sile po zaključeni²⁹ zanki $\oint \mathbf{F} d\mathbf{r} = 0$. Ker se energija torej ohranja, takim silam rečemo tudi *konservativne sile*, sistemom, ki imajo samo konservativne sile, pa *konservativni sistemi*.

Poglejmo si najprej gravitacijsko polje, ki predstavlja *težnostno potencialno energijo*. Zaradi gravitacijskega pospeška $\mathbf{g}$ na masno točko prikazano na sliki 2.33 deluje teža $\mathbf{F}_g$, ki je definirana kot:

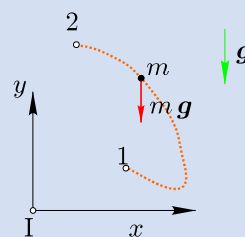
$$\mathbf{F}_g = m \mathbf{g}. \quad (2.72)$$

Če v gravitacijskem polju izračunamo delo sile (2.66) pri premiku iz točke 1 do točke 2:

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F}_g d\mathbf{r}, \quad (2.73)$$

gre za krivuljni integral (poglavje 5.3.5), ker je teža $\mathbf{F}_g =$

²⁹Integral po zaključeni zanki označimo z: $\oint$.



Slika 2.33

$(0, -mg)^T$ različna od nič samo v smeri y , sledi:

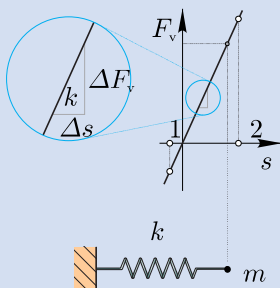
$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{y_1}^{y_2} -mg \, dy \\ &= -mg y \Big|_{y_1}^{y_2} \\ &= -mg(y_2 - y_1) \\ &= mg(y_1 - y_2). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Ker je težnostna potencialna energija definirana kot:

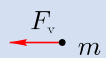
$$E_p = mgy, \quad (2.75)$$

sledi:

$$W_{12} = E_{p1} - E_{p2}. \quad (2.76)$$



Slika 2.34



Slika 2.35

Sedaj si pogledajmo še *prožnostno potencialno energijo*, katere najbolj tipičen predstavnik je linearno elastična vzmet, ki je prikazana na sliki 2.34. Vzmet je linearno elastična, ker je povezava med silo in raztezkom linearna. Če ima raztezek s vzmeti izhodišče pri neobremenjeni vzmeti, potem je sila, s katero vzmet raztegnemo za s , definirana z:

$$F_v = ks, \quad (2.77)$$

kjer je k togost vzmeti³⁰. Na sliki 2.34 je togost prikazana s smernim koeficientom premice: $k = \Delta F / \Delta s$.

Za izračun dela sile vzmeti, ki je pripeta na masno točko m , si za raztezek $s > 0$ pogledajmo diagram prostega telesa na sliki 2.35. Opazimo, da sila vzmeti usmerjena nasprotno od usmerjenosti deformacije (pomika), sledi:

³⁰Inverzna vrednost togosti $1/k$ se imenuje prožnost vzmeti.

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{s_1}^{s_2} -ks \, ds \\ &= -\frac{1}{2} k s^2 \Big|_{s_1}^{s_2} \\ &= -\frac{1}{2} k (s_2^2 - s_1^2) \\ &= \frac{1}{2} k (s_1^2 - s_2^2). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Sedaj lahko *prožnostno potencialno energijo* definiramo kot:

$$E_p = \frac{1}{2} k s^2 \quad \text{in} \quad E_p = \frac{1}{2} k_t \varphi^2, \quad (2.79)$$

kjer desni izraz predstavlja potencialno energijo linearne torzijske vzmeti³¹, togosti k_t , ki pri zasuku φ , povzroči moment $M = k_t \varphi$.

Z izrazom za potencialno energijo (2.79) sledi (podobno kot pri izrazu (2.76)):

$$W_{12} = E_{p_1} - E_{p_2}. \quad (2.80)$$

Obstajajo še druge oblike potencialnega polja (npr. električno), a jih tukaj podrobneje ne bomo obravnavali.

Če razen *potencialnih* oz. *konservativnih* sil druge sile na masno točko ne delujejo, potem lahko izenačimo³² izraz (2.70) z izrazom (2.76):

$$E_{k_2} - E_{k_1} = E_{p_1} - E_{p_2}, \quad (2.81)$$

in preuredimo v:

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}. \quad (2.82)$$

Z definiranjem *mehanske energije*:

$$E_m = E_k + E_p \quad (2.83)$$

izraz (2.82) preoblikujemo v:

$$E_{m_1} = E_{m_2}. \quad (2.84)$$

Zgornji izraz imenujemo tudi *zakon o ohranitvi mehanske energije*.

Če pogledamo bolj splošen primer, ko poleg konservativnih, delujejo tudi nekonservativne³³ sile, potem izraz (2.81) dopolnimo z delom nekonservativnih sil W_{12}^n :

$$E_{k_2} - E_{k_1} = E_{p_1} - E_{p_2} + W_{12}^n \quad (2.85)$$

in preuredimo:

$$(E_{k_2} + E_{p_2}) - (E_{k_1} + E_{p_1}) = W_{12}^n \quad (2.86)$$

ter končno pridemo do:

$$W_{12}^n = E_{m_2} - E_{m_1}. \quad (2.87)$$

Da odpravimo spremembo od stanja 1 do stanja 2, izraz odvajamo po času in izpeljemo temeljni izraz:

³¹ Izpeljava je analogna translatorski linearne vzmeti, zato ne bo posebej predstavljena.

³² Izraza lahko izenačimo, saj kinetična energija temelji na kinematičnih veličinah, potencialna pa na silah; prva je desna, druga pa leva stran II. Newtonovega zakona, glejte zgled 2.2.4.

³³ Primer nekonservativnih sil/momentov: sila trenja, pogonski moment motorja, sila upora zraka...

$$\frac{dW^n}{dt} = \frac{dE_m}{dt}, \quad (2.88)$$

ki poveže spremembo dela nekonservativnih sil, ki delujejo na masno točko s spremembo mehanske energije.

Na podlagi zgornjega izraza lahko sile delimo še na *aktivne* in *neaktivne*. Aktivne sile so tiste sile, ki na poti opravijo delo, neaktivne ga ne. Primer aktivne sile je sila trenja pri drsenju; kot primer neaktivne sile pa je normalna reakcijska sila podlage.

2.2.4 Gibalne enačbe

³⁴Matematiki bi namesto izraza gibalna enačba uporabili izraz *diferencialna enačba*.

Gibalna enačba³⁴ ali enačba gibanja pove, kako se masna točka giblje. Primer gibalne enačbe je npr.:

$$F = m\ddot{x}, \quad (2.89)$$

ki povezuje (vzrok) silo F s (posledico) pospeškom $\ddot{x}$ mase m v smeri koordinate x . Hitrost $\dot{x}$ in pomik x mase lahko določimo z reševanjem diferencialne enačbe (ob upoštevanju *začetnih pogojev*³⁵).

V kolikor ima sistem več prostostnih stopenj, potem govorimo o gibalnih enačbah sistema ali matematično o sistemu diferencialnih enačb.

Tu želimo poudariti, da gibalno enačbe ponavadi pridemo na dva načina: prek ravnotežja *sil* ali prek *energij*. Kot primer si oglejmo oba pristopa za sistem prikazan na sliki 2.36: na masno točko mase m deluje sila vzmeti kx in sila trenja F_{tr} .

Z uporabo *II. Newtonovega zakona* (2.56):

$$-kx - F_{tr} = m\ddot{x} \quad (2.90)$$

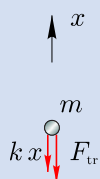
izpeljemo gibalno enačbo:

$$m\ddot{x} + kx + F_{tr} = 0. \quad (2.91)$$

Do istega izraza lahko pridemo prek energij; delo sile nekonservativne sile W^n je enako spremembi mehanske energije (2.88). Ker je konstantna sila trenja edina nekonservativna sila, velja:

$$\int -F_{tr} dx = -F_{tr} x = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2, \quad (2.92)$$

³⁵Razlika med začetnimi in robnimi pogoji: *začetni pogoji* so definirani ob določenem času, *robni pogoji* pa so definirani pri določenem kraju.



Slika 2.36

pri tem smo upoštevali, da je sila vzmeti konservativna sila, ki jo zaobjame potencialna prožnostna energija in da je vztrajnostna sila v kinetični energiji. Izraz (2.92) sedaj odvajamo po času:

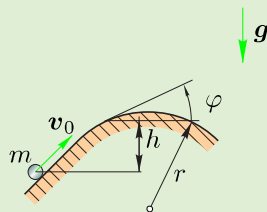
$$-F_{\text{tr}} \dot{x} = m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} \quad (2.93)$$

in pod pogojem, da $\dot{x} \neq 0$, delimo z $\dot{x}$ ter enačbo uredimo:

$$m \ddot{x} + k x + F_{\text{tr}} = 0. \quad (2.94)$$

Po pričakovanjih smo prišli do istega rezultata kot z uporabo ravnotežja sil (2.91).

V tem konkretnem primeru je bil energijski pristop bolj zamuden, vendar pa na splošno temu ni tako. Kljub temu da ima energijski pristop določene prednosti, se ga pogosto zapostavlja v primerjavi s pristopom na podlagi sil.



Slika 2.37

Zgled 2.2.1

Na sliki 2.37 je prikazana masna točka mase m , ki se brez trenja giblje po površini, ki se iz nagnjene zvezno spremeni v ukrivljeno s polmerom r . Zaradi normalnega pospeška masna točka v nekem trenutku izgubi stik s podlago. Velikost začetne hitrosti masne točke je $|v_0|$.

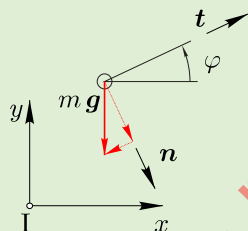
Podatki: $m = 1 \text{ kg}$, $r = 1 \text{ m}$, $|v_0| = 10 \text{ m/s}$, $\varphi_1 = 30^\circ$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Določite:

1. Število prostostnih stopenj masne točke.
2. Hitrost plošče v_1 , da se ta odlepi pri kotu φ_1 .
3. Potrebno višino h , da se plošča odlepi pri kotu φ_1 .

Rešitev

Zgled je predvsem namenjen razumevanju vloge koordinatnega sistema. Pred tem pa se ustavimo pri številu prostostnih stopenj. Dokler je masa v stiku s podlago, je za enoličen popis lege dovolj ena neodvisna spremenljivka (npr. pot). Ko se masna točka odlepi, sta potrebni dve neodvisni spremenljivki za enoličen popis lege (npr. x in y lega).



Slika 2.38

1. Naloga se navezuje na gibanje, dokler je masa v stiku s podlago, zato je število prostostnih stopenj $P = 1$.
2. V trenutku, ko se masna točka odlepi, je normalna sila podlage enaka nič in na masno točko deluje samo še teža. Narišemo lahko diagram prostega telesa, ki ga prikazuje slika 2.38. Glede na II. Newtonov zakon (2.56) zapišemo:

$$\sum \mathbf{F} = m \mathbf{a}.$$

Pravokotni koordinatni sistem

Gre za vektorski zakon in uporabiti moramo pravilni koordinatni sistem. Brez razmišljanja bi hitro uporabili pravokotni koordinatni sistem (poglavje 2.1.3):

$$\begin{aligned} x: \quad 0 &= m \ddot{x} \\ y: \quad -mg &= m \ddot{y}. \end{aligned}$$

Če ne prej, sedaj ugotovimo, da nam zgornji izraz ne bo veliko pomagal.

Naravni koordinatni sistem

Po razmisleku lahko ugotovimo, da nam naravni koordinatni sistem (poglavje 2.1.4) nudi hitro pot do odgovora. Spomnimo: tangentna smer je v smeri hitrosti, normalna smer pa je pravokotna na tangentno in kaže proti centru kroženja. Sledi:

$$\begin{aligned} t: & -m g \sin \varphi = m a_t, \\ n: & +m g \cos \varphi = m a_n, \end{aligned}$$

ker za normalni pospešek velja (2.38) $a_n = v^2/r$, izpeljemo:

$$m g \cos \varphi = m \frac{v^2}{r}$$

in nato vstavimo φ_1 namesto φ :

$$v_1 = \sqrt{g r \cos \varphi_1} = 2,9147 \text{ m/s.}$$

Polarni koordinatni sistem

Poglejmo si sedaj rešitev v polarnem koordinatnem sistemu. Slika 2.39 prikazuje trenutno lego masne točke v polarnem koordinatnem sistemu. Spomnimo: radialna komponenta kaže od izhodišča inercialnega pravokotnega koordinatnega sistema I do masne točke; kot od koordinate x do radialne komponente označimo z φ (v nasprotni smeri urinega kazalca, za več glejte poglavje 2.1.5). Krožna komponenta je pravokotna na radialno (pravi kot v nasprotni smeri urinega kazalca).

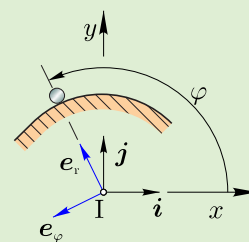
Sledi diagram prostega telesa, slika 2.40 in uporaba II. Newtonovega zakona:

$$\begin{aligned} r: & -m g \cos \varphi = m a_r, \\ \varphi: & +m g \sin \varphi = m a_\varphi. \end{aligned}$$

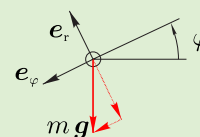
Za radialni pospešek velja (2.51) $a_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2$. Ker je polmer kroženja konstanten, sledi $\ddot{r} = 0$. Naprej vemo $r \dot{\varphi} = v$, sledi torej $r \dot{\varphi}^2 = v^2/r$ in končno:

$$-m g \cos \varphi = -m \frac{v^2}{r}.$$

Opazimo, da smo izpeljali isti izraz kot pri naravnem koordinatnem sistemu, zato zaključimo.



Slika 2.39



Slika 2.40

Vidimo torej, da se nalogo lahko reši (lažje ali težje) v različnih koordinatnih sistemih. Z nabiranjem izkušenj lahko najprimernejši koordinatni sistem hitro določimo.

3. Da pri kotu φ_1 masna točka izgubi stik s podlago, mora na višini h izgubiti dovolj kinetične energije. Ker nastopajo samo konservativne sile, se mehanska energija ohranja. Začetna kinetična energija je enaka kinetični energiji ob izletu in pridobljeni potencialni energiji:

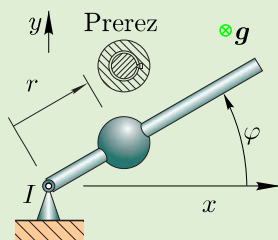
$$E_{k_0} = E_{k_1} + E_{p1},$$

sledi:

$$m g h = E_{p1} = E_{k_0} - E_{k_1} = \frac{1}{2} m (v_0^2 - v_1^2)$$

in

$$h = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2g} = 4,6638 \text{ m.}$$



Slika 2.41

Zgled 2.2.2

Na sliki 2.41 je prikazana utež mase m , ki lahko brez trenja drsi po vodilu. Vodilo rotira s stalno kotno hitrostjo $\dot{\varphi}$. V nekem trenutku izpustimo maso pri polmeru r_0 .

Podatki:

$$m = 1 \text{ kg}, r_0 = 0,5 \text{ m}, r_1 = 1 \text{ m}, \dot{\varphi} = 10 \text{ rad/s}, g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Določite:

1. Radialno hitrost pri polmeru r_1 .
2. Velikost sile na utež pri polmeru r_1 .
3. Gibalno količino pri polmeru r_1 .
4. Vrtilno količino (glede na I) pri polmeru r_1 .
5. Čas, ki je potreben, da utež prepotuje do polmera r_1 .

Rešitev

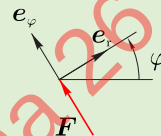
Gre za relativno preprosto nalogo, katere namen je da ponovimo integriranje in prehod iz integriranja po času, na

integriranje po poti. Očitno je, da bomo morali uporabiti II. Newtonov zakon (2.56):

$$\sum \mathbf{F} = m \mathbf{a}.$$

Ker gre za vektorski zakon, moramo definirati koordinatni sistem, v katerem bomo reševali. Ker masna točka rotira okoli izhodišča koordinatnega sistema, se polarni koordinatni sistem ponudi kar sam.

Narišemo najprej diagram prostega telesa, slika 2.42: $\mathbf{F}$ je neznana sila, ki deluje na masno točko zaradi dotika z vodom. Sledi (2.51):



Slika 2.42

$$\begin{aligned} r : \quad 0 &= m a_r = m (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2), \\ \varphi : \quad +F &= m a_\varphi = m (2 \dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}). \end{aligned}$$

1. Da določimo hitrost $\dot{r}$ pri določeni poti, moramo priti do relacije hitrost : pot ($\dot{r} : r$). Ker je kotna hitrost konstanta $\omega = \dot{\varphi}$, lahko iz izraza za radialno komponento pospeška zapišemo:

$$0 = \ddot{r} - r \omega^2 \quad \rightarrow \quad \ddot{r} = r \omega^2,$$

ki definira relacijo hitrost : čas, saj $\ddot{r} = d\dot{r}/dt$. Pomnožimo $\ddot{r}$ z $1 = dr/dr$:

$$\frac{d\dot{r}}{dt} \frac{dr}{dr}$$

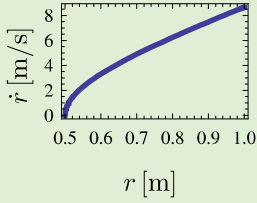
in preoblikujemo:

$$\frac{d\dot{r}}{dt} \frac{dr}{dr} = \frac{d\dot{r}}{dr} \frac{dr}{dt} = \dot{r} \frac{d\dot{r}}{dr}.$$

Tako smo izpeljali želeno relacijo hitrost : pot ($\dot{r} : r$).

Treba je izvesti integracijo:

$$\begin{aligned} \dot{r} \frac{d\dot{r}}{dr} &= r \omega^2 \\ \int_{\dot{r}_0}^{\dot{r}_1} \dot{r} d\dot{r} &= \int_{r_0}^{r_1} \omega^2 r dr \\ \frac{\dot{r}^2}{2} \Big|_{\dot{r}_0}^{\dot{r}_1} &= \omega^2 \frac{r^2}{2} \Big|_{r_0}^{r_1} \\ \frac{\dot{r}_1^2}{2} &= \omega^2 \frac{r_1^2 - r_0^2}{2} \end{aligned}$$



Slika 2.43

in končno lahko izpeljemo:

$$\dot{r}_1 = \sqrt{\omega^2 (r_1^2 - r_0^2)} = 8,66025 \text{ m/s.}$$

Hitrost $\dot{r}$ v odvisnosti od polmera r je prikazana na sliki 2.43.

2. Sedaj se lahko lotimo določitve sile pri polmeru r_1 . Vrnemo se k II. Newtonovemu zakonu za krožno smer (φ): $F = m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})$, ker je kotna hitrost konstantna $\omega = \dot{\varphi}$, sledi: $\ddot{\varphi} = 0 \text{ rad/s}^2$. Sklenemo torej:

$$F = 2m\dot{r}\omega$$

ali pri polmeru r_1 :

$$F_1 = 2m\dot{r}_1\omega = 173,205 \text{ N.}$$

3. Gibalna količina masne točke je definirana z izrazom (2.53) $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, ker gre za vektorski izraz in glede na uporabljen polarni koordinatni sistem, lahko zapišemo:

$$\mathbf{p} = m \begin{pmatrix} v_r \\ v_\varphi \end{pmatrix}.$$

Glede na izraz (2.46), sledi:

$$\mathbf{p} = m \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\varphi} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\omega \end{pmatrix}.$$

Pri polmeru r_1 , sledi

$$\mathbf{p}_1 = m \begin{pmatrix} \dot{r}_1 \\ r_1\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,66025 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ kg m/s.}$$

V kolikor bi nas naloga spraševala po velikosti gibalne količine, bi bil odgovor $p_1 = |\mathbf{p}_1| = 13,229 \text{ kg m/s}$.

4. Vrtilna količina masne točke glede na koordinatno izhodišče I je definirana z izrazom (2.59) $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, ker gre za vektorski produkt, sledi, da sta pomembni samo razdalja od krožišča in krožna hitrost:

$$L = r m v_\varphi.$$

Krožna hitrost v_φ je definirana kot $r\dot{\varphi} = r\omega$ (2.46), sledi:

$$L = r m r \omega = m r^2 \omega$$

in pri r_1

$$L_1 = m r_1^2 \omega = 10 \text{ kg m}^2/\text{s}.$$

5. To vprašanje presega okvir te naloge, vendar si pogledjmo pot, katero bi morebiti lahko ubrali. Za odgovor na prvo vprašanje bi tako lahko najprej poiskali čas, ki je potreben, da se masa premakne do r_1 . To pomeni, da bi zgoraj izpeljani izraz $\ddot{r} = r\omega^2$ želeli dvakrat integrirati. Pogledjmo to pot:

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = r\omega^2$$

ločimo spremenljivke in integriramo:

$$\int_{\dot{r}_0}^{\dot{r}_1} d\dot{r} = \int_{t_0}^{t_1} r\omega^2 dt.$$

Če ne prej, sedaj ugotovimo, da imamo z desnim integralom težavo, saj je r časovno odvisna spremenljivka. Moramo torej narediti korak nazaj in rešiti navadno diferencialno enačbo drugega reda:

$$\ddot{r} - r\omega^2 = 0.$$

Z uporabo nastavka $r(t) = e^{\lambda t}$ izpeljemo dve rešitvi: $\lambda = \omega$ in $\lambda = -\omega$, splošno rešitev dobimo, da obe rešitvi pomnožimo s konstanto in seštejemo:

$$r(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}.$$

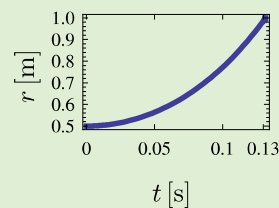
Z uporabo robnih pogojev $r(0\text{ s}) = r_0$ in $\dot{r}(0\text{ s}) = 0\text{ m/s}$ izpeljemo končno rešitev:

$$r(t) = \frac{r_0}{2} e^{-\omega t} (1 + e^{2\omega t}).$$

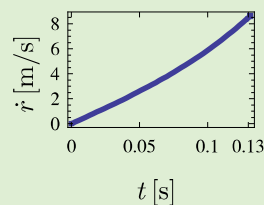
Sedaj moramo poiskati, pri katerem času t_1 velja $r(t_1) = r_1$, izpeljemo lahko:

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \log \left(\frac{r_1 + \sqrt{-r_0^2 + r_1^2}}{r_0} \right) = 0,1317\text{ s}.$$

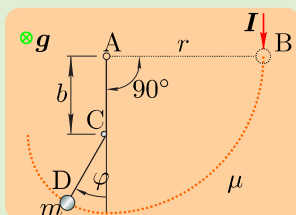
Pomik r v odvisnosti od časa je prikazan na sliki 2.44, hitrost $\dot{r}$ pa na sliki 2.45.



Slika 2.44



Slika 2.45



Slika 2.46

Zgled 2.2.3

Na sliki 2.46 je prikazana horizontalna ravnina, po kateri se lahko giblje plošča mase m , ki je z vrvjo brez mase pripeta v točki A. Plošča je v začetku mirovala, zaradi sunka sile $\mathbf{I}$ (v točki B) pa začne krožiti okoli točke A. Ko se vrv dotakne ovire C, začne krožiti okoli le-te. Koeficient trenja med ploščo in podlago je μ . Opomba: ploščo obravnavajmo kot masno točko.

Podatki: $m = 1 \text{ kg}$, $r = 1 \text{ m}$, $b = r/2$, $|\mathbf{I}| = 10 \text{ N s}$, $\mu = 0,3$, $\varphi = \pi/6$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Določite:

1. Število prostostnih stopenj plošče.
2. Hitrost plošče v_B takoj po sunku sile.
3. Hitrost plošče v_D pri kotu φ .
4. Čas, ki ga plošča potrebuje za pot od točke B do D.

Rešitev

V začetku plošča miruje. Sunk sile povzroči spremembo gibalne količine in zato plošča začne krožiti s hitrostjo v_B . Naloga nas sprašuje po začetni in končni legi; ne zanima nas kaj se dogaja vmes. Vprašati se moramo, ali se katera veličina ohranja (gibalna, vrtilna količina ali mehanska energija). Če se določena veličina ne ohranja, ali vemo določiti koliko se spremeni?

Ugotovimo lahko, da se zaradi sile trenja hitrost plošče zmanjša, posledično se spremeni gibalna količina, vrtilna količina (npr. glede na točko A) in mehanska energija. Naloga podaja dovolj podatkov, da lahko izračunamo spremembo mehanske energije, le-ta pa je enaka delu sile (2.66).

Zaradi kroženja je nalogo smiselno rešiti v polarnem ali naravnem koordinatnem sistemu; pri postopku spodaj bomo uporabili slednjega (poizkusite nalogo rešiti v polarnem koordinatnem sistemu).

1. Plošča, ki se giblje po ravnini, ima načeloma tri prostostne stopnje (dve translaciji in eno rotacijo), ker pa obravnavamo masno točko, rotacijska prostost ni potrebna. Plošča je v tej nalogi pripeta na vrv in s poznavanjem ene neodvisne spremenljivke (npr. kota vrvi)

lahko enolično popišemo lego plošče. Število prostostnih stopenj torej je $P = 1$.

2. Sunek sile velikosti $|\mathbf{I}|$ povzroči spremembo gibalne količine (2.54), izpeljemo lahko $\mathbf{I} = \Delta \mathbf{p}$ in ker nas zanima sprememba hitrosti v smeri delovanja sunka:

$$p_2 - p_1 = |\mathbf{I}|.$$

Ker je začetna gibalna količina $p_2 = 0 \text{ kg m/s}$, sledi:

$$v_B = v_2 = \frac{|\mathbf{I}|}{m} = 10 \text{ m/s}.$$

3. Ker je sila trenja konstantna $F_{\text{tr}} = -\mu m g$ (sila je glede na hitrost nasprotno usmerjena, zato negativni predznak) in ker je pot, na kateri sila trenja deluje enostavno določljiva $(\pi/2 r + \varphi r/2)$, je delo sile (2.66) trenja na poti od B do D:

$$W_{12} = F_{\text{tr}} \Delta s = -\mu m g \left(\frac{\pi}{2} r + \varphi \frac{r}{2} \right).$$

Ker je potencialna energija konstantna, se je zaradi dela sile spremenila samo kinetična energija:

$$W_{12} = E_{\text{k,D}} - E_{\text{k,B}},$$

sledi:

$$\begin{aligned} v_D &= \sqrt{\frac{2}{m} (E_{\text{k,B}} + W_{12})} \\ &= \sqrt{\frac{|\mathbf{I}|^2 - \mu g m^2 r (\varphi + \pi)}{m^2}} \\ &= 9,4453 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

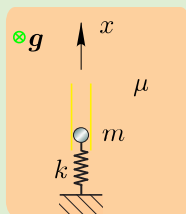
4. Uporabimo izraz (2.54). Ker smo uporabili naravni koordinatni sistem in ker je *konstantna* sila trenja vedno usmerjena nasprotno tangentialni hitrosti, lahko namesto vektorskega izraza zapišemo skalarni izraz:

$$F_{\text{tr}} \Delta t = \Delta p = p_D - p_B.$$

Sledi:

$$\Delta t = \frac{p_D - p_B}{F_{\text{tr}}} = \frac{m(v_D - v_B)}{F_{\text{tr}}} = 0,1885 \text{ s}.$$

Opomba: lahko bi se naslonili tudi na izraz (2.65) in spremljali spremembo vrtilne količine v času (zaradi zunanjega momenta).



Slika 2.47

Zgled 2.2.4

Na sliki 2.47 je prikazana masna točka mase m , ki je pritrjena na vzmet togosti k in drsi po horizontalni ravnini. Koeficient drsnega trenja med maso in podlago je μ . Začetni pogoji gibanja so: $x_0, \dot{x}_0$; pri pomiku $x = 0$ m je vzmet neobremenjena.

Podatki: $m = 1$ kg, $k = 1$ N/m, $g = 9,81$ m/s², $x_0 = 0$ m, $\dot{x}_0 = 1$ m/s, $\mu = 0,5$

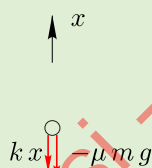
Določite:

1. Število prostostnih stopenj sistema.
2. Število konservativnih sil.
3. Število nekonservativnih sil.
4. Začetno mehansko energijo.
5. Največji raztezek vzmeti x_1 .
6. Preostalo mehansko energijo v skrajni legi x_1 .

Rešitev

Gre za relativno preprost zgled, ki bo pomagal razumeti predhodno predstavljeno teorijo.

Začnimo razmišljanje z diagramom prostega telesa. Glede na začetne pogoje lahko narišemo stanje v prvem trenutku, ko je $t > 0$ s: $x > 0$ m, zato je vzmet napeta in sila vzmeti deluje v negativni smeri (glede na izbrano koordinato x), sila trenja je usmerjena nasprotno hitrosti (nalogo bomo reševali zgolj do trenutka, ko še velja $\dot{x} > 0$). V x smeri ostalih sil na masno točko ni, slika 2.48.



Slika 2.48

1. Sistem se lahko giblje vzdolž koordinate x in ima eno prostostno stopnjo ($P = 1$).
2. Konservativne sile je (1): sila vzmeti.
3. Nekonservativna sila je (1): sila trenja.
4. Mehanska energija v prvem trenutku (2.83):

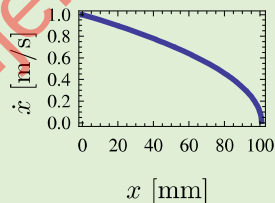
$$E_m = E_k + E_p = E_{k_0} = \frac{1}{2} m \dot{x}_0^2 = 0,5 \text{ J}$$

5. Da določimo največji raztezek vzmeti, se obrnemo na izraz (2.88). V začetku je potencialna energija enaka nič E_{p_0} , kadar bo pa raztezek največji, bo pa kinetična energija nič E_{k_1} , izpeljemo:

$$\begin{aligned} W_{01}^n &= \Delta E_{m_{01}} \\ \int_0^1 -\mu m g dx &= E_{k_1} + E_{p_1} - (E_{k_0} + E_{p_0}) \\ -\mu m g x_1 &= E_{p_1} - E_{k_0} \\ -\mu m g x_1 &= \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} m \dot{x}_0^2 \end{aligned}$$

kvadratna enačba ima dve rešitvi, fizikalno ustrezna je:

$$x_1 = \frac{\sqrt{g^2 \mu^2 m^2 + k m \dot{x}_0^2} - g \mu m}{k} = 0,101 \text{ m.}$$



Slika 2.49 prikazuje hitrost v odvisnosti od pomika.

Dodatek

Zgornji izraz, ki povezuje delo sile trenja s spremembo mehanske energije, lahko izpeljemo tudi iz II. Newtonovega zakona (2.56):

$$\sum \mathbf{F} = m \mathbf{a},$$

sledi za x smer:

$$-k x - \mu m g = m \ddot{x}.$$

Zgornji izraz integriramo po dx :

$$\int_{x_0}^{x_1} (-k x - \mu m g) dx = \int_{x_0}^{x_1} m \ddot{x} dx,$$

desni integral preoblikujemo na integriranje po hitrosti:

$\ddot{x} dx = (d\dot{x}/dt) dx = \dot{x} d\dot{x}$, sledi

$$\int_{x_0}^{x_1} (-k x - \mu m g) dx = \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}_1} m \dot{x} d\dot{x}$$

izpeljemo naprej:

$$-\frac{1}{2} k x^2 \Big|_{x_0}^{x_1} - \mu m g x \Big|_{x_0}^{x_1} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \Big|_{\dot{x}_0}^{\dot{x}_1}$$

in preoblikujemo:

$$\underbrace{-\mu m g x \Big|_{x_0}^{x_1}}_{W_{01}} = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \Big|_{\dot{x}_0}^{\dot{x}_1} + \frac{1}{2} k x^2 \Big|_{x_0}^{x_1}}_{\Delta E_{m_{01}}}.$$

Slika 2.49

6. Preostala mehanska energija je enaka $E_{p_1} = 1/2 k^2 x_1^2$.
Druga, daljša, pot: mehanska energija se je spremenila
(zmanjšala) za delo nekonservativne sile:

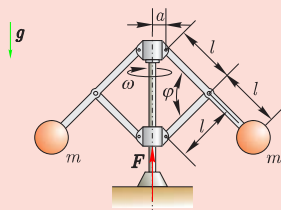
$$W_{01}^n = \int_{x_0}^{x_1} -\mu m g \, dx = -0,4949 \, \text{J}.$$

Preostala mehanska energija je torej:

$$E_{m_1} = E_{m_0} + W_{01}^n = 0,0051 \, \text{J}.$$

Naloga 2.2.1

Mehanizem z dvema masnima točkama, vsaka masa m , se prosto vrti okoli vertikalne osi z vrtilno hitrostjo n . Z delovanjem konstantne sile F se začetni kot φ spremeni na kot φ_1 . Opomba: pri spodnjih izračunih predpostavite, da je masa rok in drsnikov zanemarljiva.



Podatki: $m = 7 \text{ kg}$ $n = 45 \text{ min}^{-1}$
 $\varphi = 80^\circ$ $\varphi_1 = 65^\circ$ $g = 9,810 \text{ m/s}^2$
 $a = 0,100 \text{ m}$ $l = 0,250 \text{ m}$

Vprašanja:

1. Pretvorite vrtilno hitrost n v kotno hitrost.

Odg: $517,1 \text{ rad/s}$

2. Kolikšna je sprememba višine masnih točk zaradi spremembe kota φ ?

Odg: $8,01 \times 10^{-2} \text{ m}$

3. Določite polmer krožnice, po kateri se giblje masni točki pri φ .

Odg: $84,0 \text{ m}$

4. Določite polmer krožnice, po kateri se giblje masni točki pri φ_1 .

Odg: $55,0 \text{ m}$

5. Na podlagi zakona o spremembi vrtilne količine določite kotno hitrost masnih točk v novi legi mehanizma.

Odg: $040,4 \text{ rad/s}$

6. Določite spremembo kinetične energije masnih točk.

Odg: $871,3 \text{ J}$

7. Določite spremembo potencialne energije masnih točk.

Odg: $145,7 \text{ J}$

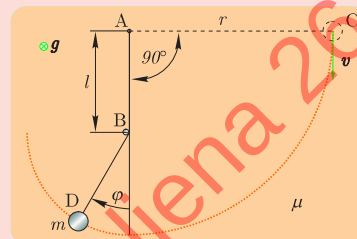
8. Določite delo sile F .

Odg: $330,5 \text{ J}$

Naloga 2.2.2

Plošča mase m se lahko giblje v horizontalni ravnini in je z vrvjo brez mase pripeta v točki A. Plošča ima v točki C hitrost v in

se začne vrteti okoli točke A, ko vrv zadane palico B, se začne vrteti okoli nje. Lego točke D definira kot φ . Koeficient trenja med ploščo in podlago je μ . Velikost plošče zanemarite.



Podatki: $m = 1,300 \text{ kg}$ $r = 1 \text{ m}$
 $l = 0,400 \text{ m}$ $v = 19 \text{ m/s}$ $g = 9,810 \text{ m/s}^2$
 $\mu = 0,250$ $\varphi = 25^\circ$

Vprašanja:

1. Kakšno je gibanje plošče? (1: premočrtno, 2: ravninsko, 3: prostorsko)

Odg: 3

2. Določite amplitudo radialnega pospeška a_r na ploščo v točki C.

Odg: 108 m/s^2

3. Določite velikost sile trenja med ploščo in podlago.

Odg: $F_{tr} = 881,8 \text{ N}$

4. Določite delo sile trenja na poti C-D.

Odg: $W = 848,3 \text{ J}$

5. Določite kinetično energijo v točki C.

Odg: $E_k = 0,488 \text{ J}$

6. Določite kinetično energijo v točki D.

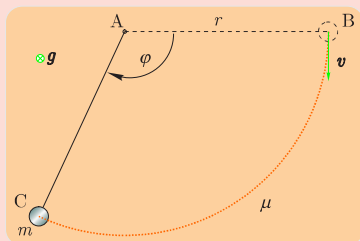
Odg: $E_{k,D} = 708,8 \text{ J}$

7. Določite hitrost plošče v točki D

Odg: $v_D = 507,81 \text{ m/s}$

Naloga 2.2.3

Plošča mase m se lahko giblje v horizontalni ravnini in je z vrvjo brez mase pripeta v točki A. Plošča ima v točki B hitrost v in se začne vrteti okoli točke A. Lego točke C definira kot φ . Koeficient trenja med ploščo in podlago je μ . Velikost plošče zanemarite.



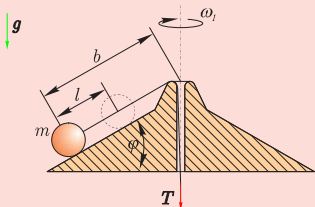
Podatki: $m = 1,600 \text{ kg}$ $r = 1,700 \text{ m}$
 $v = 9 \text{ m/s}$ $g = 9,810 \text{ m/s}^2$ $\mu = 0,100$
 $\varphi = 50^\circ$

Vprašanja:

1. Kakšno je gibanje plošče? (1: premočrtno, 2: ravninsko, 3: prostorsko)
 Odg: 3
2. Določite velikost sile trenja med ploščo in podlago.
 Odg: $0,75,1 \text{ N}$
3. Določite amplitudo radialnega pospeška a_r na ploščo v točki B.
 Odg: $7,10,71 \text{ m/s}^2$
4. Določite delo sile trenja na poti B–C
 Odg: $0,55,5 \text{ J}$
5. Določite kinetično energijo v točki C.
 Odg: $1,71,50 \text{ J}$
6. Določite hitrost plošče v točki C
 Odg: $7,58,8 \text{ m/s}$
7. Koliko časa potuje plošča od B do C?
 Odg: $0,01,0 \text{ s}$

Naloga 2.2.4

Krogla mase m se v začetnem stanju skupaj z brezmasno vrvjo dolžine b vrti okoli vertikalne osi s kotno hitrostjo ω_1 . Krogla drsi po konični površini brez trenja. Velikost krogle zanemarite.



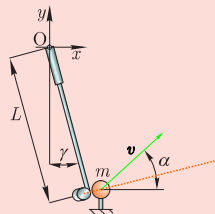
Podatki: $m = 0,400 \text{ kg}$ $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$
 $b = 0,700 \text{ m}$ $l = 0,150 \text{ m}$ $\varphi = 60^\circ$
 $g = 9,810 \text{ m/s}^2$

Vprašanja:

1. Ali se pri spremembi dolžine b spremeni tudi vrtilna količina krogle? (1: Da, 2: Ne)
 Odg: 2
2. Ali se pri spremembi dolžine b spremeni tudi kinetična energija krogle? (1: Da, 2: Ne)
 Odg: 1
3. Določite vrtilno količino krogle v začetnem stanju.
 Odg: $L_1 = 0,01 \times 80 \text{ kg m}^2/\text{s}$
4. Določite novo kotno hitrost krogle, če se b zmanjša za vrednost l .
 Odg: $\omega_2 = 0,15,8 \text{ rad/s}$
5. Določite spremembo kinetične energije krogle zaradi skrajšanja vrvi.
 Odg: $\Delta E_{kin} = 0,01 \times 11,00 \text{ J}$
6. Določite delo, ki ga opravi sila T med spreminjanjem dolžine b .
 Odg: $W_T = 0,75,0 \text{ J}$

Naloga 2.2.5

Na sliki je narisana golf palica v trenutku po udarcu, ko ima žogica hitrost v . Težnost žogice zanemarite.



Podatki: $m = 53 \times 10^{-3} \text{ kg}$ $v = 46 \text{ m/s}$
 $\alpha = 20^\circ$ $L = 0,950 \text{ m}$ $\gamma = 20^\circ$
 $t = 2 \times 10^{-3} \text{ s}$

Vprašanja:

1. Ali kot α vpliva na kinetično energijo? (1: Da, 2: Ne)
 Odg: 2
2. Kakšno kinetično energijo ima žogica po udarcu?
 Odg: $E_K = 1,70,00 \text{ J}$

3. Ali je vrtilna količina žogice glede na vrtilišče O odvisna od kota γ ? (1: Da, 2: Ne)

Odg: 1

4. Na podlagi spremembe gibalne količine določite silo na žogico, če udarec traja t sekund.

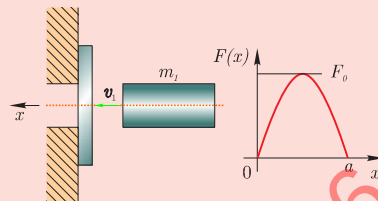
Odg: $F = \frac{m_1 v_1}{t} \times 10^{-1} \text{ N}$

5. Kakšen je povprečen pospešek žogice med trkom?

Odg: $a = \frac{v_1}{t} \times 10^{-1} \text{ m/s}^2$

6. Določite velikost vrtilne količine žogice glede na vrtilišče O .

Odg: $L = m_1 v_1 r \times 10^{-1} \text{ kg m}^2/\text{s}$



Podatki: $a = 250 \times 10^{-6} \text{ m}$ $m_1 = 270 \text{ kg}$
 $v_1 = 0,600 \text{ m/s}$ $k = 0,500$ $v_3 = 1,600 \text{ m/s}$

Vprašanja:

1. Ali sila na nož povzroči spremembo gibalne količine noža? (1: Da, 2: Ne)

Odg: 1

2. Ali se mehanska energija noža spremeni? (1: Da, 2: Ne)

Odg: 1

3. Določite začetno gibalno količino noža.

Odg: $p_1 = m_1 v_1 \times 10^{-1} \text{ kg m/s}$

4. Določite spremembe gibalne količine noža.

Odg: $\Delta p = m_1 v_3 - m_1 v_1 \times 10^{-1} \text{ kg m/s}$

5. Določite hitrost po rezanju.

Odg: $v_2 = v_3 \times 10^{-1} \text{ m/s}$

6. Določite amplitudo sile F_0 .

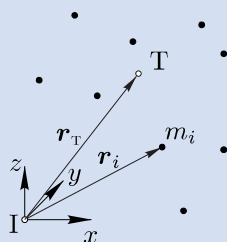
Odg: $F_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2a} \times 10^{-1} \text{ N}$

7. Predpostavite potek sile $F(x)$ in določite maso noža, da je hitrost pred v_3 in po rezanju $k \times v_3$.

Odg: $m_2 = \frac{m_1 v_1^2}{2k^2 v_3^2} \times 10^{-1} \text{ kg}$

Naloga 2.2.6

Raziskujete nove pristope k procesu štančanja. Na sliki je prikazan rezilni nož mase m_1 , ki se s hitrostjo v_1 približuje pločevini debeline a . Rezilni nož zaradi velike vztrajnosti prereže pločevino in ima po rezanju hitrost $k \times v_1$. Med procesom rezanja izmerite na pločevini silo polsinusne oblike, amplitude F_0 . Opomba: masa pločevine je zanemarljiva.



Slika 2.50

2.3 Kinetika sistema masnih točk

Kinetiko masne točke smo si že ogledali, sedaj naredimo korak naprej in si pogledjmo *kinetiko sistema masnih točk*. Gre za posplošitev, s katero bomo v naslednjem poglavju prešli na togo telo.

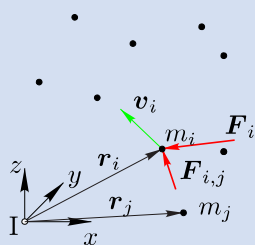
Katere masne točke definirajo sistem, je odločitev opazovalca, ki ima določene posledice, teh se bomo dotaknili pozneje pri zgledih. Najprej si na sliki 2.50 pogledjmo sistem masnih točk, katerega *masno središče* oz. *težišče* $\mathbf{r}_T$ je definirano kot:

$$\mathbf{r}_T = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}, \quad (2.95)$$

kjer je i indeks, ki teče po vseh masnih točkah sistema m_i , in je $\mathbf{r}_i$ krajevni vektor posamezne masne točke.

Imenovalec izraza (2.95) imenujemo tudi masa sistema masnih točk:

$$m_s = \sum_i m_i. \quad (2.96)$$



Slika 2.51

Na sliki 2.51 je prikazana hitrost i -te masne točke $\mathbf{v}_i$ in sile, ki delujejo nanjo. Sile so *notranje*, v kolikor delujejo med masnimi točkami izbranega sistema; prikazana $\mathbf{F}_{i,j}$ je tako *notranja sila* j -te na i -to masno točko. Sile, ki delujejo na izbrani sistem od *zunaj*, imenujemo zunanje sile; prikazana $\mathbf{F}_i$ je tako vsota vseh *zunanjih sil* na i -to masno točko.

V nadaljevanju si bomo pogledali gibalno in vrtilno količino ter energijske razmere za sistem masnih točk. Sicer lahko relativno hitro zaključimo, da je gibalna količina/vrtilna količina/delo sile sistema enostavno vsota gibalnih količin/vrtilnih količin/dela sile posameznih masnih točk, vendar pa se bo izkazalo, da za sistem masnih točk lahko izpeljemo bolj kompaktne in uporabne izraze.

2.3.1 Gibalna količina

Za zapis *gibalne količine sistema masnih točk* izhajamo iz definicije za posamezno masno točko (2.53); gibalna količina

sistema masnih točk je enostavno vsota gibalnih količin posameznih masnih točk:

$$\mathbf{p}_s = \sum_i \mathbf{p}_i, \quad (2.97)$$

sledi (2.53):

$$\mathbf{p}_s = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (2.98)$$

Če sedaj izraz za težišče (2.95) odvajamo po času, lahko (ker je masa poljubne m_i konstantna) izpeljemo:

$$\dot{\mathbf{r}}_T \sum_i m_i = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \quad (2.99)$$

in vstavimo v izraz (2.98):

$$\mathbf{p}_s = \dot{\mathbf{r}}_T \sum_i m_i. \quad (2.100)$$

S pomočjo izraza (2.96) izpeljemo *gibalno količino sistema masnih točk*:

$$\mathbf{p}_s = \sum_i \mathbf{p}_i = m_s \dot{\mathbf{r}}_T. \quad (2.101)$$

Sedaj si pogledajmo še spremembo gibalne količine. Upoštevajoč sliko 2.51 začnemo pri izrazu za i -to masno točko (2.54):

$$\mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{F}_{i,j} = \dot{\mathbf{p}}_i, \quad (2.102)$$

kjer je $\mathbf{F}_{i,j}$ *notranja sila* j -te masne točke na i -to masno točko (zaradi kateregakoli vzroka) in je torej $\sum_j \mathbf{F}_{i,j}$ vsota sil vseh masnih točk na i -to točko; $\mathbf{F}_i$ je vsota vseh *zunanjih sil* na i -to točko.

Da dobimo celotno spremembo gibalne količine, jo moramo sešteti prek vseh masnih točk:

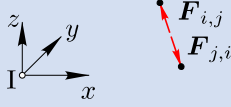
$$\sum_i \left(\mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{F}_{i,j} \right) = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i, \quad (2.103)$$

sledi

$$\sum_i \mathbf{F}_i + \sum_{i,j} \mathbf{F}_{i,j} = \dot{\mathbf{p}}_s, \quad (2.104)$$

kjer je $\dot{\mathbf{p}}_s$ sprememba gibalne količine sistema.

³⁶Zaradi III. Newtonovega zakona o vzajemnem učinku (akcija-reakcija).



Slika 2.52

Poglejmo si podrobneje izraz, vsoto $\sum_{i,j} \mathbf{F}_{i,j}$, ki jo³⁶lahko razstavimo na vsoto parov $\mathbf{F}_{i,j} + \mathbf{F}_{j,i}$. S slike 2.52 je očitno, da je vsota teh dveh sil enaka nič. Če sklep posplošimo za vse dvojice notranjih sil, potem ugotovimo, da je vsota vseh notranjih sil enaka nič:

$$\sum_{i,j} \mathbf{F}_{i,j} = 0 \quad (2.105)$$

in sledi zakon o *spremembi gibalne količine sistema masnih točk*:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_s. \quad (2.106)$$

Ne pozabimo: *notranje sile ne morejo spremeniti gibalne količine sistema*.

2.3.2 Vrtilna količina

³⁷Za motivacijo iščite na spletu video posnetek: *Slow Motion Flipping Cat Physics*.

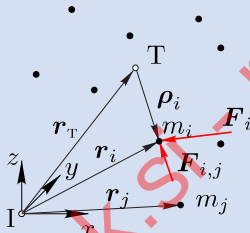
Nadaljujemo z zapisom spremembe vrtilne količine sistema masnih točk³⁷. V izbranem koordinatnem sistemu za i -to masno točko velja (2.59):

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i. \quad (2.107)$$

Vrtilna količina sistema je preprosto vsota vrtilnih količin posameznih masnih točk:

$$\mathbf{L}_s = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i). \quad (2.108)$$

Izkaže se, da ima težišče (2.95) pri vrtilni količini posebno vlogo, zato krajevni vektor $\mathbf{r}_i$ zapišemo kot: $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_T + \boldsymbol{\rho}_i$ (slika 2.53). Vrtilno količino sistema masnih točk tako zapišemo kot:



Slika 2.53

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_s &= \sum_i m_i (\mathbf{r}_T + \boldsymbol{\rho}_i) \times \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_T + \boldsymbol{\rho}_i) \\ &= \sum_i m_i (\mathbf{r}_T + \boldsymbol{\rho}_i) \times (\dot{\mathbf{r}}_T + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) \\ &= \sum_i m_i \mathbf{r}_T \times \dot{\mathbf{r}}_T + \sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_i + \\ &\quad \underbrace{\sum_i m_i \mathbf{r}_T \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_i}_A + \underbrace{\sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\mathbf{r}}_T}_B. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Če si podrobneje pogledamo izraz A in uporabimo lastnost vektorskega produkta vsote vektorjev (5.55), izpeljemo:

$$A = \sum_i m_i \mathbf{r}_T \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \mathbf{r}_T \times \underbrace{\sum_i m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i}_{A_1}. \quad (2.110)$$

Sedaj podrobneje pogledajmo izraz A_1 : razmišljati začnemo pri:

$$\sum_i m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i \right), \quad (2.111)$$

kjer je $\sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i$ zelo podoben števcu izraza za izračun lege težišča (2.95). Ker je $\boldsymbol{\rho}_i$ relativni vektor od težišča do posamezne masne točke i , lahko po premisleku³⁸ ugotovimo, da je $\sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i = 0$, posledično je tudi:

$$\sum_i m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i = 0 \quad \text{in} \quad A = 0. \quad (2.112)$$

Če ne zaupamo premisleku, lahko s pomočjo izraza (2.95) pokažemo:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i &= \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_T) \\ &= \sum_i m_i \mathbf{r}_i - \sum_i m_i \mathbf{r}_T \\ &= m_s \mathbf{r}_T - m_s \mathbf{r}_T \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.113)$$

Če nadaljujemo z izrazom B iz (2.109):

$$B = \sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\mathbf{r}}_T = \left(\sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i \right) \times \dot{\mathbf{r}}_T, \quad (2.114)$$

dobimo enako vsoto kot zgoraj $\sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i$ in sklenemo $B = 0$.

Izraz za vrtilno količino sistema masnih točk (2.109) se torej poenostavi:

$$\mathbf{L}_s = \mathbf{r}_T \times m_s \dot{\mathbf{r}}_T + \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i, \quad (2.115)$$

kjer je prvi del vrtilna količina težišča glede na izbrani koordinatni sistem in drugi del pa vrtilna količina okoli težišča.

³⁸Iščemo namreč lego težišča, pri čemer se nahajamo v težišču.

Nadaljujmo z raziskavo momenta, ki deluje na sistem masnih točk. Glede na sliko 2.53 za i -to masno točko velja (2.65):

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \left(\sum_j \mathbf{F}_{i,j} + \mathbf{F}_i \right) = \dot{\mathbf{L}}_i. \quad (2.116)$$

Če za izbrani koordinatni sistem seštejemo momente in spremembe vrtilne količine vseh masnih točk:

$$\begin{aligned} \sum_i \left(\mathbf{r}_i \times \left(\sum_j \mathbf{F}_{i,j} + \mathbf{F}_i \right) \right) &= \sum_i \dot{\mathbf{L}}_i \\ \sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i,j} + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i &= \sum_i \dot{\mathbf{L}}_i. \end{aligned} \quad (2.117)$$

V zgornjem izrazu si pogledjmo $\sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i,j}$. Vemo, da notranje sile $\mathbf{F}_{i,j}$ nastopajo v parih $\mathbf{F}_{i,j} = -\mathbf{F}_{j,i}$.

V vsoti $\sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i,j}$ si pogledjmo podrobneje en takšen par:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i,j} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{j,i} &= \\ \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i,j} - \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{i,j} &= \\ (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{i,j} &= 0. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Glede na izraz (2.118) ugotovimo, da je vsota momenta dvojice sil $\mathbf{F}_{i,j}$ in $\mathbf{F}_{j,i}$ enaka nič, saj je vektor $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ kolinearen z vektorjem $\mathbf{F}_{i,j}$ (slika 2.54) in dva kolinearna vektorja imata vektorski produkt enak nič.

Podoben sklep lahko naredimo za poljubno dvojico notranjih sil in sledi torej:

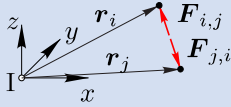
$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{L}}_s. \quad (2.119)$$

Glede na izraz (2.115) lahko sedaj odvajamo še desno stran:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}_s &= \frac{d}{dt} \left(\mathbf{r}_T \times m_s \dot{\mathbf{r}}_T + \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \right) \\ &= \dot{\mathbf{r}}_T \times m_s \dot{\mathbf{r}}_T + \mathbf{r}_T \times m_s \ddot{\mathbf{r}}_T + \\ &\quad \sum_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i + \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \ddot{\boldsymbol{\rho}}_i. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Ker je vektorski produkt kolinearnih vektorjev enak nič, sledi: $\dot{\mathbf{r}}_T \times m_s \dot{\mathbf{r}}_T = 0$ in $\sum_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i = 0$.

Iz izrazov (2.119) in (2.120) izpeljemo končni izraz za spremembo vrtilne količine sistema masnih točk v izbranem koordinatnem sistemu:



Slika 2.54

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{L}}_s = \mathbf{r}_T \times m_s \ddot{\mathbf{r}}_T + \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \ddot{\boldsymbol{\rho}}_i. \quad (2.121)$$

Sklep: na spremembo vrtilne količine sistema vplivajo samo zunanje sile $\mathbf{F}_i$; *notranje sile ne morejo spremeniti vrtilne količine sistema.*

2.3.3 Energijske razmere

Pri masni točki smo obravnavo začeli z delom sile na posamezno masno točko (2.66). Za sistem masnih točk seveda velja, da je skupno delo vsota dela na posameznih masnih točkah:

$$W_{12} = \sum_i W_{12,i}. \quad (2.122)$$

Če pogledamo *kinetično energijo* (2.69):

$$E_k = \sum_i E_{k,i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 \quad (2.123)$$

in zapišemo krajevni vektor s pomočjo težišča $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_T + \boldsymbol{\rho}_i$ in upoštevamo, da velja $|\dot{\mathbf{r}}_i|^2 = \dot{\mathbf{r}}_i \dot{\mathbf{r}}_i$, sledi:

$$\begin{aligned} E_k &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\mathbf{r}}_T + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) (\dot{\mathbf{r}}_T + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\mathbf{r}}_T \dot{\mathbf{r}}_T + 2 \dot{\mathbf{r}}_T \dot{\boldsymbol{\rho}}_i + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) \\ &= \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_T \dot{\mathbf{r}}_T}_A + \underbrace{\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_T \dot{\boldsymbol{\rho}}_i}_B + \\ &\quad \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i}_C. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Poglejmo si člen A podrobneje: velja $\dot{\mathbf{r}}_T \dot{\mathbf{r}}_T = |\dot{\mathbf{r}}_T|^2$, sledi:

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbf{r}}_T|^2 = \frac{1}{2} m_s |\dot{\mathbf{r}}_T|^2, \quad (2.125)$$

kjer je $m_s = \sum_i m_i$ masa obravnavanega sistema.

Poglejmo še del B izraza (2.124): opazimo, da gre za podoben izraz kot v primeru (2.110) in sklenemo lahko:

$$\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_T \dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \dot{\mathbf{r}}_T \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i = 0. \quad (2.126)$$

Ostane samo še del C (2.124), pri katerem pa lahko popravimo zgolj zapis: $\dot{\boldsymbol{\rho}}_{\text{T}} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_{\text{T}} = |\dot{\boldsymbol{\rho}}_{\text{T}}|^2$.

Izraz za kinetično energijo sistema masnih točk lahko zapišemo (2.124):

$$E_{\text{k}} = \underbrace{\frac{1}{2} m_{\text{s}} |\dot{\boldsymbol{r}}_{\text{T}}|^2}_A + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i |\dot{\boldsymbol{\rho}}_i|^2}_C, \quad (2.127)$$

kjer del A imenujemo tudi *kinetična energija težišča* in del C *kinetična energija glede na težišče*.

Za *potencialno energijo sistema masnih točk* lahko zapišemo:

$$E_{\text{p}} = \sum_i E_{\text{p},i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} E_{\text{p},i,j}, \quad (2.128)$$

kjer je $E_{\text{p},i,j}$ *notranja potencialna energija*, ki je za toga telesa enaka nič.

V kolikor obravnavamo potencialno energijo teže, ki je definirana z izrazom (2.75), potem sledi:

$$E_{\text{p}} = \sum_i m_i g y_i = m_{\text{s}} g y_{\text{T}}, \quad (2.129)$$

kjer je y_{T} višina težišča sistema masnih točk.

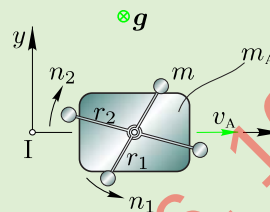
Zgled 2.3.1

Na sliki 2.55 je prikazan voziček mase m_A , ki se giblje s hitrostjo v_A . Na voziček sta na os pritrjena dva para krogel, ki rotirata v nasprotnih smereh. Prvi par mas rotira z vrtilno hitrostjo n_1 na polmeru r_1 , drugi pa z vrtilno hitrostjo n_2 na polmeru r_2 . Vsaka krogla ima maso m in jo obravnavajte kot masno točko. Maso palic zanemarite.

Podatki: $m = 1,6 \text{ kg}$, $m_A = 16 \text{ kg}$,
 $r_1 = 450 \text{ mm}$, $r_2 = 300 \text{ mm}$, $v_A = 1,2 \text{ m/s}$,
 $n_1 = 80 \text{ vrt/min}$, $n_2 = 100 \text{ vrt/min}$

Določite:

1. Število prostostnih stopenj sistema masnih točk.
2. Gibalno količino sistema.
3. Vrtilno količino sistema.
4. Kinetično energijo sistema.

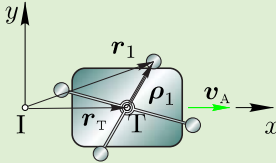


Slika 2.55

Rešitev

Gre za nazoren primer sistema masnih točk, kjer teoretične izpeljave pridejo do izraza (z masno točko poenostavimo tudi voziček). Najprej je treba natančneje definirati sistem masnih točk. Sistem masnih točk so voziček in krogle, zato zanemarimo mase palic, ležajev, koles...

1. Število prostostnih stopenj $P = 3$. Razlaga: voziček se očitno lahko giblje vzdolž koordinatne osi x (1 prostostna stopnja) in vsaka od palic se lahko prosto vrtilno (2 prostostni stopnji). Da enolično popišemo lego sistema v nekem trenutku, potrebujemo najmanj pomik vozička v smeri osi x , zasuk prvega para krogel in zasuk drugega para krogel.
2. Gibalno količino sistema lahko seveda izračunamo tako, da seštejemo gibalne količine masnih točk: $\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i$. Ker bi na tak način morali obravnavati lego vsake od masnih točk, bi bilo to zamudno. Če uporabimo izraz (2.101), pa moramo vedeti samo hitrost težišča $\mathbf{v}_T$ in maso celotnega sistema m_s . Težišče sistema je očitno v vrtilšču, slika 2.56, hitrost težišča pa



Slika 2.56

je enaka hitrosti gibanja vozička.

Gibalna količina sistema je torej:

$$p = m_s v_T = (4m + m_A) v_A = 26,88 \text{ kg m/s},$$

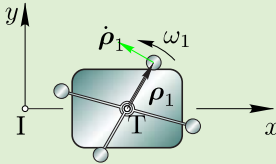
kjer smo gibalno količino zapisali skalarno, saj je vsa gibalna količina v smeri koordinate x .

3. Tudi vrtilno količino sistema lahko izračunamo s preprosto vsoto $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$. Hitro ugotovimo, da bi bil tak način zelo zamuden in se spomnimo izraza (2.115), ki vrtilno količino definira prek težišča:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_T \times m_s \dot{\mathbf{r}}_T + \sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_i.$$

S slike 2.56 vidimo, da sta vektorja $\mathbf{r}_T$ in $\dot{\mathbf{r}}_T = \mathbf{v}_A$ kolinearna in zato velja $\mathbf{r}_T \times m_s \dot{\mathbf{r}}_T = \mathbf{0}$ (glejte tudi 5.3.4). Preostane nam torej še samo vrtilna količina glede na težišče: $\sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$. Ker krogle krožijo relativno glede na vrtilno točko/težišče, je relativni krajevni vektor $\boldsymbol{\rho}_i$ pravokoten na relativno hitrost $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i$, glejte sliko 2.57. Sledi torej: $|\boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_i| = |\boldsymbol{\rho}_i| |\dot{\boldsymbol{\rho}}_i|$. Zapišemo:

$$|\mathbf{L}| = 2(r_1 m v_1) + 2(-r_2 m v_2) = 2,41 \text{ kg m}^2/\text{s},$$



Slika 2.57

kjer je hitrost krogle $v_1 = |\dot{\boldsymbol{\rho}}_1| = r_1 \omega_1$ in kotna hitrost $\omega_1 = 2\pi n_1 = 8,378 \text{ rad/s}$. Podobno za drugi par krogel $\omega_2 = -2\pi n_2 = 10,472 \text{ rad/s}$. Pri drugem paru pazimo, saj se vrti v smeri urinega kazalca in ima posledično negativni predznak.

Sedaj lahko vrtilno količino zapišemo še vektorsko:

$$\mathbf{L} = 2,41 \text{ kg m}^2/\text{s} \mathbf{k},$$

kjer je $\mathbf{k}$ enotski vektor v smeri osi z .

4. Preostane samo še kinetična energija. Ponovno s seštevanjem posameznih masnih točk $E_k = \sum_i E_{k,i}$ ne pridemo daleč; lahko pa glede na izraz (2.127) zapišemo:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m_s |\dot{\mathbf{r}}_T|^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i |\dot{\boldsymbol{\rho}}_i|^2 \\ &= \frac{1}{2} (m_A + 4m) v_A^2 + \\ &\quad \left(2 \left(\frac{1}{2} m v_1^2 \right) + 2 \left(\frac{1}{2} m v_2^2 \right) \right) \\ &= 54,659 \text{ J}. \end{aligned}$$

Zgled 2.3.2

Na sliki 2.58 je prikazan vojaški tank z aktivnim ščitom za izstrelke z visoko kinetično energijo. Aktivni ščit lahko kinetično energijo projektila bistveno zmanjša. Pri tem zgledu si bomo pogledali kako.

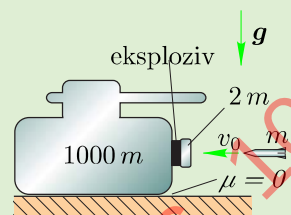
Izstrelak mase m se s hitrostjo v_0 približuje mirujočemu tanku mase $1000\,m$ z aktivnim ščitom mase $2\,m$. Ko tank zazna približevanje izstrelka, se sprosti eksploziv energije W , ki se v celoti pretvori v kinetično energijo tanka in ščita. Ko nato izstrelak trči v ščit, se z njim zlepi in tako telo nadaljuje pot proti tanku s hitrostjo v_k .

Opomba: predpostavite, da med tankom in podlago ni trenja.

Podatki: $m = 10\,\text{kg}$, $v_0 = 1000\,\text{m/s}$, $W = 10^5\,\text{J}$

Določite:

1. Kinetično energijo izstrelka pred dotikom.
2. Gibalno količino izstrelka pred dotikom.
3. Hitrost tanka v_t in ščita v_s po eksploziji.
4. Hitrost zlepljenega telesa (ščit in izstrelak) v_k .
5. Kinetično energijo, s katero trešči zlepljeno telo v tank.



Slika 2.58

Rešitev

1. Začetna kinetična energija izstrelka

$$E_{k,0} = \frac{1}{2} m v_0^2 = 5 \cdot 10^6\,\text{J}.$$

2. Začetna gibalna količina izstrelka

$$p_0 = m v_0 = 10000\,\text{kg m/s}.$$

3. Ob eksploziji se vsa energija spremeni v kinetično energijo tanka in ščita

$$W = \frac{1}{2} (1000\,m) v_t^2 + \frac{1}{2} (2\,m) v_s^2.$$

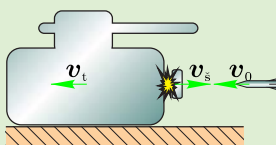
Hkrati pa se (ker ni zunanjih sil) ohranja gibalna količina sistema tank-ščit, ker je bila le-ta pred eksplozijo nič, sledi:

$$0 = (1000\,m) v_t - (2\,m) v_s.$$

Opomba: upoštevali smo pozitivno gibalno količino v smeri hitrosti v_0 in smeri narisane na sliki 2.59 (zato je v_s negativna). Iz zadnjih dveh enačb lahko določimo dve neznani hitrosti:

$$v_t = \sqrt{\frac{W}{250500\,m}} = 0,1998\,\text{m/s}$$

$$v_s = \sqrt{\frac{500\,W}{501\,m}} = 99,9001\,\text{m/s}.$$



Slika 2.59

4. Ob trku ščita in izstrelka se ohranja gibalna količina (ker ni zunanjih sil):

$$-2\,m\,v_s + m\,v_0 = 3\,m\,v_k.$$

Sledi, da je hitrost zlepljenega izstrelka in ščita

$$v_k = \frac{501\sqrt{m}\,v_0 - 20\sqrt{2505}\sqrt{W}}{1503\sqrt{m}} = 266,733\,\text{m/s}.$$

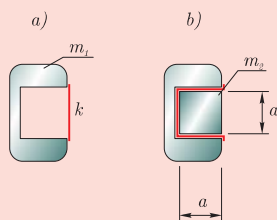
5. Kinetična energija, s katero zlepljeno telo trešči v tank, je torej:

$$E_{k,k} = \frac{1}{2} (3\,m) v_k^2 = 1,07 \cdot 10^6\,\text{J}.$$

Opazimo, da se z uporabo aktivnega ščita (eksplozija energije W) kinetična energija, ki deluje na tank, bistveno zmanjša (na približno 20 % začetne).

Naloga 2.3.1

Zaposleni ste v Evropski vesoljski agenciji (ESA). Nadrejeni želijo, da izračunate gibalne enačbe pri izstrelitvi raziskovalnega robota Beagle 2 (masa m_2) iz raziskovalne sonde Mars Express (masa m_1). Na sliki a) je prikazan Mars Express pred vstavitvijo raziskovalnega robota Beagle 2; v tem položaju je gumijasta vzmet togosti k neobremenjena. Opombe: izstrelitev se dogaja v breztežnem prostoru; trenje je zanemarljivo majhno.



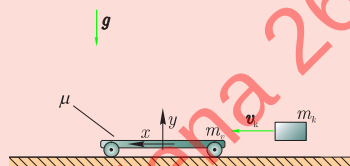
Podatki: $m_1 = 1 \text{ kg}$ $m_2 = 2 \text{ kg}$
 $k = 100 \text{ N/m}$ $a = 0,500 \text{ m}$

Vprašanja:

- Določite dolžino, za katero se raztegne gumijata vzmet.
Odg: 1 m
- Določite velikost sile v gumijasti vzmeti za stanje na sliki b).
Odg: 001 N
- Določite delo, ki je potrebno za vstavljanje Beagle 2.
Odg: 00 J
- Določite potencialno energijo, ki jo ima vzmet v stanju na sliki b).
Odg: 00 J
- Ob izstrelitvi Beagle 2 iz Mars Expressa (slika b) se gibalna količina sistema ohranja? (1: Da, 2: Ne)
Odg: 1
- Ob izstrelitvi Beagle 2 iz Mars Expressa (slika b) se mehanska energija sistema ohranja? (1: Da, 2: Ne)
Odg: 1
- Določite hitrost Mars Expressa po izstrelitvi (absolutna vrednost).
Odg: 001,8 m/s
- Določite hitrost Beagle 2 po izstrelitvi (absolutna vrednost).
Odg: 000,4 m/s

Naloga 2.3.2

Vagon mase m_1 miruje, ko nanj s hitrostjo v_1 pade klada mase m_2 . Klada drsi po vagonu in se po času t glede na vagon ustavi.



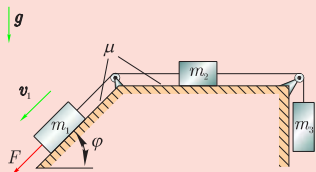
Podatki: $m_v = 32 \text{ kg}$ $m_k = 7 \text{ kg}$
 $v_k = 7,600 \text{ m/s}$ $t = 1,700 \text{ s}$ $g = 9,810 \text{ m/s}^2$

Vprašanja:

- Ali se gibalna količina celotnega sistema ohranja? (1: Da, 2: Ne)
Odg: 1
- Ali se mehanska energija celotnega sistema ohranja? (1: Da, 2: Ne)
Odg: 0
- Kolikšna je hitrost vagona in klade tik po tem, ko klada preneha drseti?
Odg: $v = 100,1 \text{ m/s}$
- Kolikšen impulz sile deluje na klado, medtem ko drsi po vagonu?
Odg: $I = 100,1 \text{ Ns}$
- Kolikšen je koeficient trenja med vagonom in klado?
Odg: $\mu = 100,0$
- Za koliko se spremeni mehanska energija sistema (od časa, ko klada pade na vagon, do časa, ko preneha drseti)?
Odg: $E = 0,001 \text{ J}$

Naloga 2.3.3

Tri masne točke so povezane z neraztegljivo vrvjo in se gibljejo s hitrostjo v_1 . Na točke prične delovati konstantna sila F , tako da se v času t hitrost točk poveča na v_2 .



Podatki: $m_1 = 60 \text{ kg}$ $m_2 = 30 \text{ kg}$
 $m_3 = 35 \text{ kg}$ $\mu = 0,300$ $\varphi = 40^\circ$
 $v_1 = 1 \text{ m/s}$ $v_2 = 8 \text{ m/s}$ $t = 14 \text{ s}$
 $g = 9,810 \text{ m/s}^2$

Vprašanja:

1. Ali se gibalna količina sistema ohranja? (1: Da, 2: Ne)

Odg: Σ

2. Ali se kinetična energija sistema ohranja? (1: Da, 2: Ne)

Odg: Σ

3. Določite povprečni pospešek masnih točk v času t .

Odg: $0,070 \text{ m/s}^2$

4. Ali se trenutni pospešek masnih točk spreminja? (1: Da, 2: Ne)

Odg: Σ

5. Določite spremembo gibalne količine sistema.

Odg: 878 kg m/s

6. Določite velikost konstantne sile F .

Odg: $800,175 \text{ N}$

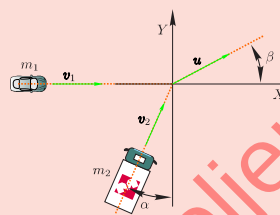
7. Določite kinetično energijo sistema po času t .

Odg: $801 \times 10^3 \text{ J}$

Naloga 2.3.4

Rekonstruirate prometno nesrečo na križišču Slovenske in Gosposvetske ulice, kot je narisana na sliki. Tovornjak (m_2 ,

v_2) je spregledal avtomobil (m_1 , v_1) in trčil vanj. Po trku sta se vozili združili in se gibali s skupno hitrostjo u pod kotom β . Situacijo opazujete tik pred in po trku, tako da lahko zanemarite trenje med pnevmatikami in cestiščem.



Podatki: $m_2 = 5 \times 10^3 \text{ kg}$ $v_2 = 10 \text{ m/s}$
 $\alpha = 10^\circ$ $\beta = 20^\circ$ $u = 20 \text{ m/s}$

Vprašanja:

1. Ali se gibalna količina sistema avtomobil-tovornjak ohranja? (1: Da, 2: Ne)

Odg: $p = 1$

2. Kaj se dogaja pred/po trku z gibalno količino sistema avtomobil-tovornjak v X smeri? (1: Večja pred trkom, 2: Večja po trku, 3: Se ne spreminja)

Odg: $p_X = 8$

3. Kaj se dogaja pred/po trku z mehansko energijo sistema avtomobil-tovornjak? (1: Večja pred trkom, 2: Večja po trku, 3: Se ne spreminja)

Odg: $E_m = 1$

4. Določite maso avtomobila (m_1).

Odg: $m_1 = 801 \times 801,5 \text{ kg}$

5. Določite hitrost avtomobila pred trkom (v_1).

Odg: $v_1 = 888,78 \text{ m/s}$

6. Koliko mehanske energije se je pretvorilo v deformacijsko delo med trkom?

Odg: $W_{def} = 888,5 \text{ MJ}$

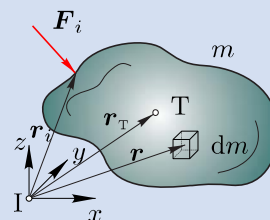
2.4 Kinetika togih teles

Kinetiko smo najprej preučevali na masni točki, potem smo si ogledali posplošitev na poljuben sistem masnih točk, sedaj bomo pa poskušali izpeljave iz sistema masnih točk omejiti najprej na *togo telo*, nato pa še na sistem togih teles³⁹. V tem poglavju bomo sicer togo telo obravnavali sprva splošno v trirazsežnem prostoru, potem pa se bomo osredotočili predvsem na ravninsko kinetiko togih teles.

³⁹Za motivacijo iščite na spletnem video posnetku: *MIT Robotic Cheetah*.

2.4.1 Prostorsko gibanje togega telesa

Togo telo lahko gledamo kot sistem velikega števila masnih točk, pri katerem se *razdalje med masnimi točkami ne spreminjajo*. Obravnavali bomo toga telesa zvezno porazdeljene mase, ki pa imajo poljubno obliko. Poljubno telo je prikazano na sliki 2.60, kjer je dm diferencialna masa, $\mathbf{r}$ krajevni vektor do diferenciala mase, $\mathbf{r}_T$ krajevni vektor do težišča in m masa togega telesa. Zunanja sila $\mathbf{F}_i$, ki deluje na telo, ima krajevni vektor $\mathbf{r}_i$.



Slika 2.60

Gibalna količina

Pri raziskovanju sistema masnih točk smo ugotovili, da je gibalna količina sistema masnih točk (2.101) definirana enostavno kot: $\mathbf{p} = m_s \mathbf{v}_T$, kjer je m_s masa sistema in $\mathbf{v}_T$ hitrost težišča. Togo telo še vedno lahko gledamo kot na sistem masnih točk in zato je *gibalna količina togega telesa*:

$$\mathbf{p} = m \dot{\mathbf{r}}_T, \quad (2.130)$$

kjer je $\dot{\mathbf{r}}_T$ hitrost težišča telesa⁴⁰:

$$\mathbf{r}_T = \frac{\int_m \mathbf{r} dm}{\int_m dm}, \quad (2.131)$$

in m masa togega telesa⁴¹:

$$m = \int_m dm \quad (2.132)$$

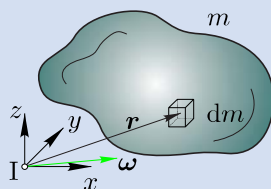
⁴⁰Podobno kot pri sistemu masnih točk (2.95).

⁴¹Podobno kot pri sistemu masnih točk (2.96).

Podobno kot pri sistemu masnih točk, je zakon o *spremembi gibalne količine togega telesa*:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}} = m \ddot{\mathbf{r}}_T, \quad (2.133)$$

kjer je $\sum \mathbf{F}_i$ vsota vseh zunanjih sil na telo.



Slika 2.61

Vrtilna količina

Poglejmo si sedaj vrtilno količino togega telesa prikazanega na sliki 2.61, kjer je $\boldsymbol{\omega}$ kotna hitrost. Glede na izraz za sistem togih teles (2.108) lahko za zvezno telo zapišemo:

$$\mathbf{L} = \int_m \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \, dm, \quad (2.134)$$

ker velja $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (glejte poglavje 5.3.4), sledi:

$$\mathbf{L} = \int_m \underbrace{\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}_A \, dm. \quad (2.135)$$

Če sedaj uvedemo vektorja:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \quad (2.136)$$

potem lahko izraz A (2.135) zapišemo kot:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ -(\omega_x z - \omega_z x) \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

in nadaljujemo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \omega_y z - \omega_z y & -(\omega_x z - \omega_z x) & \omega_x y - \omega_y x \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega_x (y^2 + z^2) - \omega_y x y - \omega_z x z \\ -\omega_x x y + \omega_y (x^2 + z^2) - \omega_z y z \\ -\omega_x x z - \omega_y y z + \omega_z (x^2 + y^2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.137)$$

Ko smo vektor $\mathbf{A}$ določili, lahko izvedemo integriranje (2.135). Integriramo lahko vsako komponento vektorja posebej, izpostavimo konstante in izpeljemo vrtilno količino:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \omega_x J_{xx} - \omega_y J_{xy} - \omega_z J_{xz} \\ -\omega_x J_{yx} + \omega_y J_{yy} - \omega_z J_{yz} \\ -\omega_x J_{zx} - \omega_y J_{zy} + \omega_z J_{zz} \end{pmatrix}, \quad (2.138)$$

kjer smo vpeljali *osne*⁴²masne vztrajnostne momente (*MVM*): ⁴²Ali tudi aksialni MVM.

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \int_m (y^2 + z^2) \, dm \\ J_{yy} &= \int_m (x^2 + z^2) \, dm \\ J_{zz} &= \int_m (x^2 + y^2) \, dm \end{aligned} \quad (2.139)$$

in *deviacijske*⁴³masne vztrajnostne momente:

⁴³Ali tudi centrifugalni MVM.

$$\begin{aligned} J_{xy} &= J_{yx} = \int_m (x y) \, dm \\ J_{xz} &= J_{zx} = \int_m (x z) \, dm \\ J_{yz} &= J_{zy} = \int_m (y z) \, dm. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Z vpeljavo masne vztrajnostne matrike:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}, \quad (2.141)$$

lahko *vrtilno količino togega telesa* zapišemo:

$$\mathbf{L} = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}. \quad (2.142)$$

Pomembna lastnost masnih vztrajnostnih momentov (togih teles) je v tem, da so konstantni. To pomeni, da jih glede na izraze (2.139, 2.140) izračunamo enkrat in jih potem obravnavamo kot konstantno lastnost pomembno pri rotaciji teles⁴⁴. Iz tega razloga nam programska oprema za tridimenzionalno načrtovanje ponuja tudi izračun masnih lastnosti⁴⁵.

⁴⁴Podobno kot masa pri translaciji.

⁴⁵ang. *mass properties*

Masni vztrajnostni momenti so pomembni in imajo veliko lastnosti in posebnosti, ki jih je treba izpostaviti in natančno preštudirati. Da ne bi zmotili toka misli pri obravnavi kinetike togega telesa, je masnim vztrajnostnim momentom namenjeno poglavje 5.1 v dodatku.

Po obravnavi vrtilne količine togega telesa, bi bilo logično nadaljevati s spremembo vrtilne količine ter mehansko energijo. Ker pa obravnava spremembe vrtilne količine in mehanske energije v prostoru presega namen tega učbenika, se bomo v nadaljevanju omejili na ravninsko gibanje togega telesa.

2.4.2 Ravninsko gibanje togega telesa

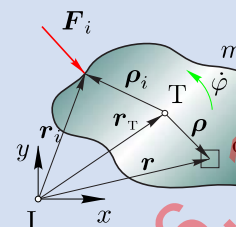
Na sliki 2.62 je prikazano togo telo v ravnini. Telo se nahaja v koordinatnem sistemu xyz , katerega vrtenje okoli osi težišča T definira kotna hitrost $\dot{\varphi}$; $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_T$ in $\boldsymbol{\rho}$ so krajevni, težiščni in relativni vektor diferencialne mase dm ; $\mathbf{r}_i$ in $\boldsymbol{\rho}_i$ sta krajevni in relativni vektor zunanje sile $\mathbf{F}_i$.

Pri togih telesih ravnijsko gibanje ponavadi delimo na *translacijo*, *rotacijo* in *ravnijsko gibanje*⁴⁶.

O translaciji govorimo takrat, kadar je za premik telesa potreben samo premik težišča, ni pa potrebna rotacija okoli težišča (slika 2.63: 1 označuje začetno stanje, 2 pa končno).

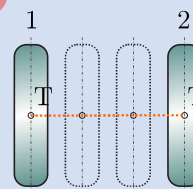
O rotaciji govorimo takrat, kadar je za premik iz ene v drugo lego potrebna samo rotacija okoli težišča (slika 2.64).

O splošnem ravnijskem gibanju govorimo takrat, kadar je potrebno premakniti tako težišče, kot tudi izvesti rotacijo okoli težišča (slika 2.65). Na sliki 2.66 je prikazana krivočrtna translacija (za premik iz ene lege v drugo rotacija okoli težišča ni potrebna).

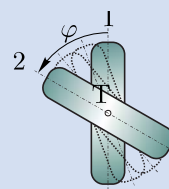


Slika 2.62

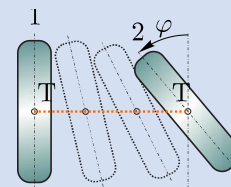
⁴⁶Pogovorno namesto ravnijskega gibanja slišimo tudi: translacija + rotacija.



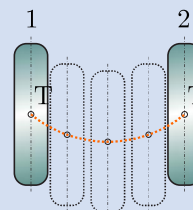
Slika 2.63



Slika 2.64



Slika 2.65



Slika 2.66

Gibalna količina

Gibalno količino in njeno spremembo smo v celoti obravnavali v prostoru, zato dodatna obravnava tukaj ni potrebna.

Vrtilna količina v ravnini

Vrtilno količino togega telesa v prostoru, ki se vrti glede na v koordinatnem izhodišču definirano kotno hitrost ω , definira izraz (2.142). Tukaj bomo vrtilno količino hoteli zapisati glede na izbrano koordinatno izhodišče, pri čemer se bomo osredotočili na gibanje težišča in rotacijo okoli težišča. Izpeljavo torej začnemo pri, za zvezno telo v ravnini, prilagojenem izrazu (2.115):

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_T \times m \dot{\mathbf{r}}_T + \underbrace{\int_m \boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} dm}_A \quad (2.143)$$

Ker ležita krajevni vektor do težišča $\mathbf{r}_T$ in hitrost težišča $\dot{\mathbf{r}}_T$ v ravnini xy , je vrtilna količina v smeri koordinate z in zato bomo v nadaljevanju uporabili samo skalarno vrtilno

količino v smeri osi z : L_z . Podobno ugotovimo za izraz znotraj integrala: $\boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}$: relativni vektor $\boldsymbol{\rho}$ in njegov odvod po času ležita v ravnini xy . Ker obravnavamo togo telo, ki se glede na težišče T vrti s kotno hitrostjo $\dot{\varphi}$, sta vektorja $\boldsymbol{\rho}$ in $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ pravokotna in namesto A (2.143) lahko zapišemo:

$$A = \int_m \boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} \, dm = \int_m |\boldsymbol{\rho}| |\dot{\boldsymbol{\rho}}| \dot{\varphi} \, dm, \quad (2.144)$$

ker je kotna hitrost $\dot{\varphi}$ konstanta, lahko zapišemo tudi:

$$A = \dot{\varphi} \int_m |\boldsymbol{\rho}|^2 \, dm = \dot{\varphi} J_{z_T z_T}, \quad (2.145)$$

kjer smo prepoznali izraz za težiščni masni vztrajnostni moment⁴⁷ (glejte poglavje 5.1):

$$J_T = J_{z_T z_T} = \int_m |\boldsymbol{\rho}|^2 \, dm \quad (2.146)$$

Izraz (2.143) lahko torej poenostavimo v:

$$L_z = \mathbf{r}_T \times m \dot{\mathbf{r}}_T + J_{z_T z_T} \dot{\varphi}, \quad (2.147)$$

kjer je L_z vrtilna količina v smeri koordinate z .

Nadaljujemo sedaj s spremembo vrtilne količine v ravnini; podobno kot pri sistemu masnih točk (2.121), zapišemo:

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{L}} \quad (2.148)$$

in na levi vstavimo $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_T + \boldsymbol{\rho}_i$, na desni pa odvajamo po času izraz (2.147):

$$\sum_i (\mathbf{r}_T + \boldsymbol{\rho}_i) \times \mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{r}}_T \times m \dot{\mathbf{r}}_T + \mathbf{r}_T \times m \ddot{\mathbf{r}}_T + J_{z_T z_T} \ddot{\varphi} \quad (2.149)$$

⁴⁷Ker je težiščni MVM definiran glede na os z , je pravilen zapis $J_{z_T z_T}$. Ponavadi pa pri ravninski dinamiki os z izpustimo in napišemo kar J_T .

upoštevamo⁴⁸ $\dot{\mathbf{r}}_T \times m \dot{\mathbf{r}}_T = 0$ in nadaljujemo:

$$\sum_i \mathbf{r}_T \times \mathbf{F}_i + \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_T \times m \ddot{\mathbf{r}}_T + J_{z_T z_T} \ddot{\varphi}. \quad (2.150)$$

V nadaljevanju za $m \ddot{\mathbf{r}}_T$ upoštevamo izraz (2.130):

$$\mathbf{r}_T \times \sum_i \mathbf{F}_i + \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_T \times \sum_i \mathbf{F}_i + J_{z_T z_T} \ddot{\varphi} \quad (2.151)$$

⁴⁸Vektorski produkt dveh kolinearnih vektorjev je vedno enak nič.

krajšamo $\mathbf{r}_T \times \sum_i \mathbf{F}_i$:

$$\sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{F}_i = J_{z_T z_T} \ddot{\varphi}. \quad (2.152)$$

Za togo telo torej zunanji moment glede na težišče, spremeni vrtilno količino glede na težišče:

$$\sum_i \mathbf{M}_{T,i} = J_{z_T z_T} \ddot{\varphi}. \quad (2.153)$$

Energijske razmere

Najprej si pogledjmo kinetično energijo; začnemo pri izrazu za sistem masnih točk (2.127) in ga priredimo za zvezno togo telo:

$$E_k = \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{r}}_T|^2 + \int_m \frac{1}{2} |\dot{\boldsymbol{\rho}}|^2 dm, \quad (2.154)$$

ker je pri togem telesu, ki se vrti s konstantno kotno hitrostjo $\dot{\varphi}$ relativna hitrost $|\dot{\boldsymbol{\rho}}| = |\boldsymbol{\rho}| \dot{\varphi}$, sledi:

$$E_k = \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{r}}_T|^2 + \int_m \frac{1}{2} |\boldsymbol{\rho}|^2 \dot{\varphi}^2 dm. \quad (2.155)$$

Izpostavimo kotno hitrost in vstavimo izraz (2.146).

Sledi izraz za kinetično energijo togega telesa v ravnini:

$$E_k = \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{r}}_T|^2 + \frac{1}{2} J_{z_T z_T} \dot{\varphi}^2. \quad (2.156)$$

Pri potencialni energiji teže za togo telo (podobno kot za sistem masnih točk (2.129)) velja:

$$E_p = m g y_T. \quad (2.157)$$

Gibalne enačbe togega telesa pri splošnem ravninskem gibanju

Če smo za masno točko v poglavju 2.2.4 do gibalnih enačb prišli prek spremembe gibalne količine za masno točko, potem tukaj pridemo do gibalnih enačb prek spremembe gibalne in vrtilne količine. Za poljubno togo telo, na katerega

delujejo zunanje sile $\mathbf{F}_i$, velja, da le-te spremenijo njeno gibalno (2.133) in vrtilno količino glede na težišče (2.153):

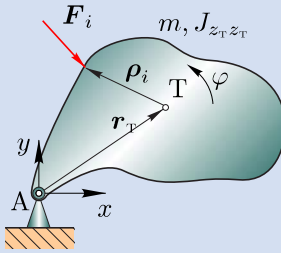
$$\sum_i \mathbf{F}_i = m \ddot{\mathbf{r}}_T \quad \sum_i \mathbf{M}_{T,i} = J_{z_T z_T} \ddot{\varphi}. \quad (2.158)$$

Izraz tudi imenujemo II. Newtonov zakon za ravninsko gibanje ali tudi II. Newtonov zakon za translacijo (levi izraz) in rotacijo (desni izraz)⁴⁹.

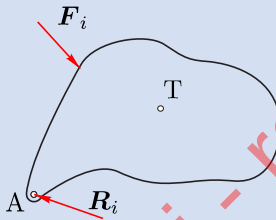
Do istih gibalnih enačb kot z uporabo izraza (2.158) pridemo tudi prek dela nekonservativnih sil (2.88), ki ga odvajamo po času:

$$\frac{dW^n}{dt} = \frac{dE_m}{dt}. \quad (2.159)$$

⁴⁹Za motivacijo iščite na spletu video posnetek: *Bullet Block Experiment Result*.



Slika 2.67



Slika 2.68

Zgled 2.4.1 podaja dodatna pojasnila.

Gibalne enačbe togega telesa pri rotaciji okoli nepomične osi

Izraza (2.158) in (2.159) veljata na splošno in nas vedno pripeljeta do gibalnih enačb. Izkaže se, da se za rotacijo togega telesa okoli *nepomične osi* lahko oba omenjena izraza poenostavita. S poenostavljenima izrazoma pa lahko hitreje izpeljemo gibalne enačbe.

Poglejmo si torej primer na sliki 2.67: togo telo mase m in masnega vztrajnostnega momenta $J_{z_T z_T}$ okoli težišča T se vrti okoli nepomične osi A, ki se nahaja v koordinatnem izhodišču. $\mathbf{r}_T$ je krajevni vektor do težišča, $\boldsymbol{\rho}_i$ pa relativni vektor od težišča do prijemališča zunanje sile $\mathbf{F}_i$. Zasuk okoli vrtilišča popisuje φ .

Da lahko uporabimo II. Newtonov zakon za translacijo in rotacijo (2.158), je treba narisati diagram prostega telesa, ki je prikazan na sliki 2.68. Dodati moramo torej reakcije $\mathbf{R}$ v podpori A in nato lahko zapišemo:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i) + \mathbf{R} = m \ddot{\mathbf{r}}_T \quad (2.160)$$

$$\sum_i (\mathbf{M}_{T,i} + (-\mathbf{r}_T \times \mathbf{R})) = J_{z_T z_T} \ddot{\varphi}. \quad (2.161)$$

Reakcijo $\mathbf{R}$ lahko izpostavimo iz izraza (2.160) in nato vstavimo v (2.161); hkrati upoštevamo še $\mathbf{M}_{T,i} = \boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{F}_i$:

$$\sum_i \left(\boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{F}_i + \left(-\mathbf{r}_T \times \left(m \ddot{\mathbf{r}}_T - \sum_i \mathbf{F}_i \right) \right) \right) = J_{z_T z_T} \ddot{\varphi} \quad (2.162)$$

in izraz preuredimo:

$$\sum_i (\mathbf{r}_T + \boldsymbol{\rho}_i) \times \mathbf{F}_i = J_{z_T z_T} \ddot{\varphi} + \mathbf{r}_T \times (m \ddot{\mathbf{r}}_T). \quad (2.163)$$

Sedaj se osredotočimo na $\mathbf{r}_T \times (m \ddot{\mathbf{r}}_T)$; skalarno maso izpostavimo $m \mathbf{r}_T \times \ddot{\mathbf{r}}_T$. Ker težišče T kroži okoli točke A, lahko vektorski produkt vektorja $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}_T$ zapišemo v polarnem koordinatnem sistemu (poglavje 2.1.5) in množimo velikost krajevnega vektorja s $|\mathbf{r}_T|$ z velikostjo krožnega pospeška $|\mathbf{r}_T| \ddot{\varphi}$, sledi:

$$\sum_i (\mathbf{r}_T + \boldsymbol{\rho}_i) \times \mathbf{F}_i = J_{z_T z_T} \ddot{\varphi} + m |\mathbf{r}_T|^2 \ddot{\varphi}. \quad (2.164)$$

Na levi strani izraza (2.164) vpeljemo $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_T + \boldsymbol{\rho}_i$, na desni izpostavimo kotni pospešek $\ddot{\varphi}$:

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = (J_{z_T z_T} + m |\mathbf{r}_T|^2) \ddot{\varphi}. \quad (2.165)$$

Ugotovimo, da $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ predstavlja zunanji moment glede na vrtilišče A. Upoštevajoč definicijo masnega vztrajnostnega momenta pri translatorsnem premiku (5.15) je MVM glede na os A: $J_A = J_{z_T z_T} + m |\mathbf{r}_T|^2$.

Izpeljali smo torej II. Newtonov zakon za kroženje okoli nepomične osi:

$$\sum_i \mathbf{M}_{A,i} = J_A \ddot{\varphi}. \quad (2.166)$$

⁵⁰Seveda ne smemo pozabiti, da izpeljava velja samo v primeru kroženja okoli nepomične osi.

Bistvena prednost izraza (2.166) pred izrazom (2.158) je v tem, da nam ni treba iskati reakcij v podpori, zato je reševanje bistveno hitrejš⁵⁰.

V kolikor želimo priti do gibalnih enačb prek energijskih zakonov, potem se izkaže, da je mogoče kinetično energijo popisati enostavneje. V nadaljevanju si pogledimo izpeljavo za rotacijo okoli nepomične osi A (slika 2.67). Začnimo s splošnim izrazom (2.156) in upoštevajmo, da je velikost hitrosti $|\dot{\mathbf{r}}_T|^2$ pri kroženju glede na nepomično os A $(|\mathbf{r}_T| \dot{\varphi})^2$

$$E_k = \frac{1}{2} m (|\mathbf{r}_T| \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} J_{z_T z_T} \dot{\varphi}^2. \quad (2.167)$$

Ko izpostavimo kvadrat kotne hitrosti $\dot{\varphi}^2$, opazimo $J_A = J_{z_T z_T} + m |\mathbf{r}_T|^2$ (5.15) in sledi:

$$E_k = \frac{1}{2} J_A \dot{\varphi}^2. \quad (2.168)$$

Ponovno opazimo, da se v posebnem primeru kroženja tega telesa okoli nepomične osi A definicija za kinetično energijo bistveno poenostavi.

2.4.3 Sistem togih teles

V kolikor obravnavamo sistem togih teles, je treba II. Newtonov zakon (2.158) uporabiti za vsako togo telo posebej, pri čemer sile, ki delujejo med posameznimi telesi, obravnavamo kot zunanje sile na telo.

V kolikor pa sistem togih teles obravnavamo na podlagi energij (2.159), potem sistema ni treba razrezati na posamezna telesa, pač pa ga lahko gledamo v celoti in obravnavamo samo tiste notranje sile, ki so nekonservativne. Več si bomo pogledali v okviru zgleada 2.4.2.

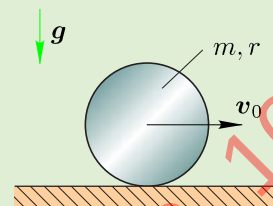
Zgled 2.4.1

Na sliki 2.69 je prikazan valj mase m in polmera r , ki se kotali s koeficientom kotalnega trenja po horizontalni podlagi.

Podatki: $m = 1 \text{ kg}$, $r = 0,1 \text{ m}$, $|\mathbf{v}_0| = 10 \text{ m/s}$, $f = 0,01$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Določite:

1. Število prostostnih stopenj valja.
2. Ali je sistem konservativen?
3. Masni vztrajnostni moment valja glede na težišče.
4. Pol hitrosti.
5. Ali kotaljenje lahko obravnavamo kot poseben primer rotacije okoli nepomične osi?
6. Gibalno enačbo s pomočjo II. Newtonovega zakona.
7. Gibalno enačbo s pomočjo energij.

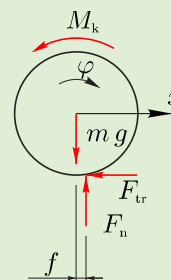


Slika 2.69

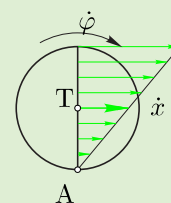
Rešitev

Kotalno trenje je definirano kot zaviralni moment velikosti $M_k = f F_n$. F_n normalna sila na podlago, f pa ročica te sile (slika 2.70).

1. Ker se valj kotali, obravnavamo sistem z eno prostostno stopnjo. Dovolj je, da poznamo ali lego težišča v horizontalni smeri ali zasuk okoli težišča $P = 1$.
2. Kotalno trenje povzroča izgubo energije, zato je sistem nekonservativen.
3. Težiščni MVM za valj je (Poglavje 5.5.1): $J_T = \frac{1}{2} m r^2$.
4. Pol hitrosti pri kotaljenju valja se nahaja v stični točki s podlago (točka A na sliki 2.71). Če v nekem trenutku "zamrznemo" stanje, potem je v težišču valja hitrost $\dot{x}$, valj pa se navidezno vrti okoli točke A. Ker je polmer valja r , lahko glede na sliko 2.71 določimo $\dot{x} = r \dot{\varphi}$. Analogno lahko določimo hitrost vsake točke na valju, ki leži na premici skozi točki A in T; obodna hitrost je npr. $2 r \dot{\varphi}$.
5. Da lahko. Pol hitrosti je navidezno mirujoča točka rotacije in zato velja izpeljava za rotacijo okoli nepomične osi (2.166).



Slika 2.70



Slika 2.71

6. Poglejmo si diagram sil in momentov na prosto telo (slika 2.70). Za uporabo izraza (2.166) potrebujemo $J_A = J_T + m r^2 = \frac{3}{2} m r^2$ in vsoto vseh momentov okoli točke A, sledi:

$$\sum_i M_{A,i} = -M_k = J_A \ddot{\varphi},$$

kjer smo za prostostno stopnjo, s katero bomo popisali sistem, izbrali φ . Ker je po definiciji kotalni upor $M_k = f F_n$. Ker je normalna sila $F_n = m g$ sledi gibalna enačba:

$$-f m g = \frac{3}{2} m r^2 \ddot{\varphi},$$

⁵¹Konstanta pred pospeškom je enaka 1.

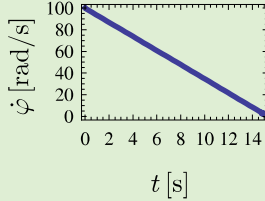
zapisano v normirani obliki⁵¹:

$$\ddot{\varphi} + \frac{2 f g}{3 r^2} = 0.$$

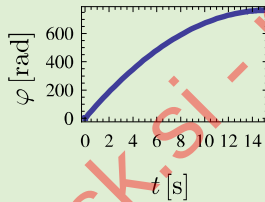
Gibalna enačba nam pove, kako se sistem giblje. Z integriranjem zgornje enačbe in ob upoštevanju začetnih pogojev ($\dot{\varphi}(0\text{ s}) = |\mathbf{v}_0|/r$ in $\varphi(0\text{ s}) = 0\text{ m}$) lahko izpeljemo:

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{3 r |\mathbf{v}_0| - 2 f g t}{3 r^2} \quad \text{slika 2.72.}$$

$$\varphi(t) = \frac{3 r t |\mathbf{v}_0| - f g t^2}{3 r^2} \quad \text{slika 2.73}$$



Slika 2.72



Slika 2.73

Opomba: do gibalne enačbe seveda pridemo s pomočjo splošnega izraza (2.158), ki ga zapišemo za težišče in upoštevamo tudi vse reakcije v točki A, v tem primeru rešimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} x : & \quad -F_{tr} = m \ddot{x} \\ y : & \quad F_n - m g = m \ddot{y} \\ \varphi : & \quad r F_{tr} - f F_n = J_T \ddot{\varphi}. \end{aligned}$$

7. Izpeljimo sedaj gibalno enačbo še na podlagi energij, glejte izraz (2.159). Edina nekonservativna *aktivna sila*⁵² je (konstanten) kotalni upor:

$$W_{12} = \int_{\varphi} M_k d\varphi = -f m g \varphi.$$

⁵²Aktivna sila je tista, ki opravlja delo. V konkretni nalogi sila F_{tr} ni aktivna, saj se ne premika (vedno se nahaja v točki kotaljenja).

Po drugi strani pa je kinetična energija konstantna in je torej vsa mehanska energija v kinetični energiji:

$$E_{m_{12}} = E_{k_{12}} = \frac{1}{2} J_A \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2.$$

Vstavimo v (2.159)

$$\frac{d}{dt} (-f m g \varphi) = \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2 \right)$$

in izpeljemo:

$$-f m g \dot{\varphi} = \frac{3}{2} m r^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi}$$

ter po deljenju s $\dot{\varphi} \neq 0$:

$$-f g = \frac{3}{2} r^2 \ddot{\varphi},$$

končamo pri istem izrazu kot prej.

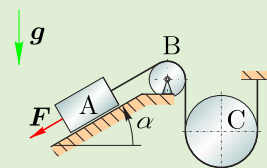
Zgled 2.4.2

Na sliki 2.74 je prikazan sistem togih teles: telo A ima maso m , valj B ima polmer r in maso m , valj C ima polmer $2r$ in maso $2m$. Na telo A deluje na eni strani sila $\mathbf{F}$, na drugi strani je z lahko, neraztegljivo vrvjo prek teles B in C povezana s podlago. Trenje je zanemarljivo.

Podatki: $F = |\mathbf{F}|, m, r, g, \alpha$.

Določite:

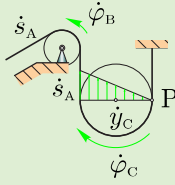
1. Število prostostnih stopenj sistema.
2. Ali je sistem konservativen.
3. Aktivne nekonservativne sile.
4. Gibalno enačbo.



Slika 2.74

Rešitev

1. Sistem ima eno prostostno stopnjo $P = 1$. Opomba: normalno je, da predpostavimo, da mora biti vrv napeta, sicer bi sistem imel več prostostnih stopenj in več stanj.



Slika 2.75

2. Sistem ni konservativen, saj sila $\mathbf{F}$ vanj vnaša delo.
3. Aktivna nekonvativna sila je $\mathbf{F}$.
4. Gibalno enačbo izpeljemo s pomočjo izraza (2.159). Ker ima sistem eno prostostno stopnjo, lahko stanje sistema popišemo z eno neodvisno spremenljivko; v ta namen si pogledimo sliko 2.75. Na skrajni desni strani je valj C prek vrvi pripet na okolico in v točki P se nahaja pol hitrosti. Ker torej telo C navidezno rotira okoli P s kotno hitrostjo $\dot{\varphi}_C$, je hitrost težišča telesa C $\dot{y}_C = 2r\dot{\varphi}_C$ in hitrost na levem koncu valja C $\dot{s}_A = 2\dot{y}_C = 4r\dot{\varphi}_C$. Naprej velja, da je kotna hitrost s hitrostjo telesa A povezana $\dot{s}_A = r\dot{\varphi}_B$.

Definirajmo sedaj delo sile (2.66):

$$W = F s_A$$

in mehansko energijo (2.83):

$$E_m = E_{m,A} + E_{m,B} + E_{m,C}.$$

Definirajmo posamezne mehanske energije:

$$\begin{aligned} E_{m,A} &= E_{k,A} + E_{p,A} = \frac{1}{2} m \dot{s}_A^2 - m g s_A \sin \alpha \\ E_{m,B} &= E_{k,B} + E_{p,B} = \frac{1}{2} J_B \dot{\varphi}_B^2 + 0 \\ E_{m,C} &= E_{k,C} + E_{p,C} = \frac{1}{2} (2m) \dot{y}_C^2 + \frac{1}{2} J_C \dot{\varphi}_C^2 \\ &\quad + 2m g y_C. \end{aligned}$$

Masni vztrajnostni momenti so:

$$J_B = \frac{1}{2} m r^2 \quad J_C = \frac{1}{2} (2m) (2r)^2$$

in manjkajoče povezave med koordinatami (slika 2.75):

$$\begin{aligned} \varphi_B &= \frac{s_A}{r}, \\ \varphi_C &= \frac{s_A}{4r}, \\ y_C &= 2r \varphi_C = \frac{s_A}{2}. \end{aligned}$$

Sedaj želimo uporabiti izraz (2.159). Najprej zapišemo:

$$\frac{9}{8} m \dot{s}_A^2 + g m s_A - g m s_A \sin \alpha = F s_A$$

in nato z odvajanjem po času:

$$g m \dot{s}_A - g m \dot{s}_A \sin \alpha + \frac{9}{4} m \ddot{s}_A \dot{s}_A = F \dot{s}_A.$$

Ker zgornji izraz velja ob poljubnem času (hitrosti), velja:

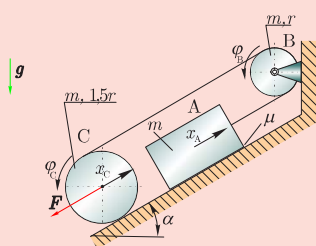
$$\ddot{s}_A = \frac{4(F + g m (\sin \alpha - 1))}{9m}.$$

S tem smo izpeljali gibalno enačbo sistema.

Opomba: do iste gibalne enačbe lahko pridemo z uporabo II. Newtonovega zakona za togo telo (2.158), vendar moramo ravnotežje zapisati za vsako telo posebej in sistem razdeliti na tri telesa, med katerimi deluje neznana sila v vrvi. Slednji postopek je zamudnejši, vendar je koristen pri preverjanju lastnega znanja in razumevanja.

Naloga 2.4.1

Dinamski sistem na sliki sestavljajo tri toga telesa. Med telesom A in podlago nagiba α je koeficient trenja μ . Valj B ima polmer r in maso m . Na valj C, ki se kotali po podlagi ter ima polmer $1,5r$ in maso m , deluje konstantna sila F . V trenutku, ki nas zanima, se masa A giblje s hitrostjo $\dot{x}_A$.



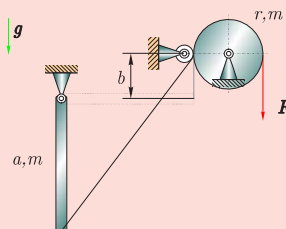
Podatki: $m = 2 \text{ kg}$ $r = 0,200 \text{ m}$
 $\dot{x}_A = 4 \text{ m/s}$

Vprašanja:

1. Določite število prostostnih stopenj sistema.
Odg: 1
2. Določite razmerje $\dot{x}_A/\dot{x}_C$. (pazite predznak)
Odg: $\frac{1}{2}$
3. Določite kinetično energijo celotnega sistema.
Odg: 0,8 J
4. Koliko nekonservativnih sil ima sistem?
Odg: 2

Naloga 2.4.2

Slika prikazuje industrijska vrata mase m in višine a , ki se odpirajo s pomočjo vrvi zanemarljive mase. Vrv je napeta prek valja mase m in polmera r ter ne podrsava. V začetku vrata mirujejo. Dvig vrat v horizontalno lego se izvede s pomočjo konstantne sile F . Težo pomožnega kolesa zanemarimo.



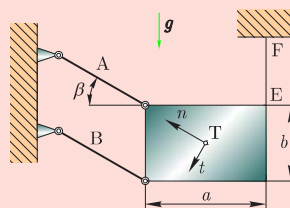
Podatki: $a = 2 \text{ m}$ $b = 0,400 \text{ m}$
 $r = 0,300 \text{ m}$ $m = 25 \text{ kg}$ $F = 300 \text{ N}$
 $g = 9,810 \text{ m/s}^2$

Vprašanja:

1. Koliko prostostnih stopenj ima sistem?
Odg: 1
2. Ali se mehanska energija ohranja? (1: Da, 2: Ne)
Odg: 2
3. Določite spremembo potencialne energije vrat, ko so ta v horizontalni legi.
Odg: 0,81 J
4. Določite dolžino poti sile F pri dvigu vrat.
Odg: 1,8 m
5. Določite delo sile F pri dvigu.
Odg: 0,81 J
6. Določite kotno hitrost valja v trenutku, ko so vrata v horizontalni legi.
Odg: 0,07 rad/s

Naloga 2.4.3

Tanka plošča mase m visi na vrvi $\overline{EF}$, kot je prikazano na sliki. V trenutku t_0 se vrv pretrga. Maso ročic A in B zanemarimo.



Podatki: $a = 800 \text{ mm}$ $b = 800 \text{ mm}$
 $m = 4 \text{ kg}$ $\beta = 50^\circ$ $g = 9,810 \text{ m/s}^2$

Vprašanja:

1. Gibanje plošče vključuje rotacijo, saj se težišče plošče giblje po krožnici. (1: Da, 2: Ne)

Odg: Σ

2. Plošča opravlja le krivočrtno translacijo. (1: Da, 2: Ne)

Odg: I

3. Plošča opravlja le rotacijo. (1: Da, 2: Ne)

Odg: Σ

4. Določite pospešek plošče v t smeri.

Odg: $808,8 \text{ m/s}^2$

5. Določite pospešek plošče v n smeri.

Odg: 0 m/s^2

6. Določite silo F_B v ročici B.

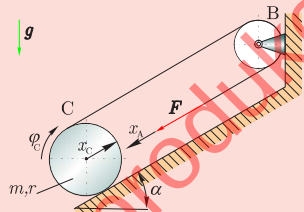
Odg: $88,8 \text{ N}$

7. Določite silo F_A v ročici A.

Odg: $840,88 \text{ N}$

Naloga 2.4.4

Valj C se kotali po strmini nagiba α in je prek škripca B povezan s silo F .



Podatki: $m = 4 \text{ kg}$ $r = 0,450 \text{ m}$ $F = 39 \text{ N}$
 $\alpha = 70^\circ$ $g = 9,810 \text{ m/s}^2$

Vprašanja:

1. Določite število prostostnih stopenj sistema.

Odg: I

2. Določite razmerje x_A/x_C . (pazite predznak)

Odg: Σ

3. Določite razmerje x_C/φ_C

Odg: $0,24,0 \text{ m}$

4. Točka kjer se valj dotika podlage je pol hitrosti. (1: Da, 2: Ne)

Odg: I

5. Določite MVM valja J_v okoli dotikaljšča s podlago.

Odg: $818,1 \text{ kg m}^2$

6. Gibalna enačba valja je:

$$2 r F - m g r = J_v \ddot{\varphi}_C. \quad (1: \text{ Da}, 2: \text{ Ne})$$

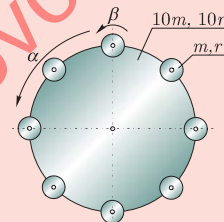
Odg: Σ

7. S pomočjo pravilne gibalne enačbe določite pospešek $\ddot{\varphi}_C$.

Odg: $888,81 \text{ rad/s}^2$

Naloga 2.4.5

Na sliki prikazan satelit (nahaja se v breztežnosti) je sestavljen iz velikega valja (mase $10m$ in polmera $10r$) in osmih majhnih valjev. Začetno stanje: satelit se vrti s kotno hitrostjo $\dot{\alpha}_0$, majhni valji relativno na satelit mirujejo.



Podatki: $m = 10 \text{ kg}$ $r = 0,300 \text{ m}$

$\dot{\alpha}_0 = 2 \text{ rad/s}$ $\dot{\alpha}_1 = 8 \text{ rad/s}$

Vprašanja:

1. V začetnem stanju majhni valji v absolutnem koor. sist. opravljajo translatorsno gibanje okoli osi velikega valja in rotacijsko gibanje okoli svoje osi. (1: Da, 2: Ne)

Odg: I

2. Vozniki kros motorjev uporabljajo princip ohranitve vrtilne količine, da v zraku nad skakalnico s pospeševanjem zadnjega kolesa uravnavajo svoj položaj med letom. (1: Da, 2: Ne)

Odg: Σ

3. Ali se vrtilna količina ohranja, če je prisoten zunanji moment? (1: Da, 2: Ne)

Odg: Σ

4. Določite vrtilno količino L_0 v začetku.

Odg: $801 \times 748,8 \text{ kg m}^2/\text{s}$

5. Določite kinetično energijo E_{k0} v začetku.

Odg: $801 \times 748,8 \text{ J}$

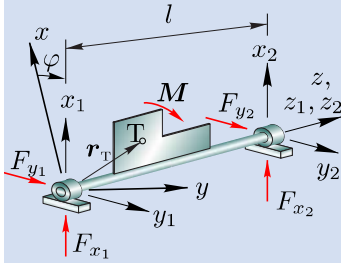
6. Določite absolutno kotno hitrost majhnih valjev $\dot{\beta}_1$, da se bo velikemu valju kotna hitrost spremenila iz $\dot{\alpha}_0$ na $\dot{\alpha}_1$.

Odg: $801 \times 840,1 \text{ rad/s}$

2.4.4 Rotacija okoli nepomične osi v prostoru

⁵³Za motivacijo iščite na spletu video posnetek: *Balancing a Large Impeller*.

⁵⁴Kot *rotor* se razume celotno vrteče se telo.



Slika 2.76

Posebno poglavje bomo posvetili rotaciji poljubnega togega telesa (v prostoru) okoli nepomične osi; gre za pogost primer iz prakse vrtenja rotorjev okoli osi⁵³. Znanje, pridobljeno v tem poglavju, bo tudi omogočilo razumevanje uravnoteženja rotorja. Za razumevanje tega poglavja je nujno podrobno razumevanje masnih vztrajnostnih momentov, ki so natančno obravnavani v dodatku 5.1.

Na sliki 2.76 je tako prikazan togi *rotor*⁵⁴, ki je vrtljivo vpet med dvema ležajema; rotor ima težišče v točki T in razdaljo med ležajema l . Na sliki 2.76 koordinatni sistem x, y, z predstavlja fiksni koordinatni sistem, koordinatna sistema x_1, y_1, z_1 (izhodišče v prvem ležaju) in x_2, y_2, z_2 (izhodišče v drugem ležaju) pa se vrtita skupaj z rotorjem, pri čemer težišče T leži na ravnini $x_1 z_1$ oziroma $x_2 z_2$; zasuk relativne osi x_1 glede na absolutno os x popisuje kot φ .

Pri študiju zunanjih sil in momentov na rotor bomo statične vplive (npr. težo) zanemarili, saj predpostavljamo, da so dinamični vplivi bistveno večji (statične vplive pa sicer relativno enostavno obvladamo).

Na rotor deluje zunanji moment M , na mestu ležajev, pa na rotor delujejo zunanje sile, ki jih opazujemo *v vrtečem se koordinatnem sistemu*: komponenti sile v prvem ležaju F_{x_1} in F_{y_1} se vrtita skupaj s koordinatnim sistemom x_1, y_1, z_1 , komponenti sile v drugem ležaju F_{x_2} in F_{y_2} pa se vrtita skupaj s koordinatnim sistemom x_2, y_2, z_2 . Lega težišča T v vrtečem se koordinatnem sistemu x_1, y_1, z_1 definira krajevni vektor $\mathbf{r}_T$:

$$\mathbf{r}_T = \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ d \end{pmatrix}, \quad (2.169)$$

kjer parameter e označuje ekscentričnost rotorja, d pa osno razdaljo od prvega ležaja do težišča.

Kot smo se naučili v poglavju 2.4, zunanje sile in zunanji momenti povzročijo spremembo gibalne oz. vrtilne količine ter vodijo v *II. Newtonov zakon* za togo telo. Za spremembo gibalne količine smo zapisali (2.133):

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}} = m \ddot{\mathbf{r}}_T, \quad (2.170)$$

in podobno zapišemo vrtilno količino:

$$\sum_i \mathbf{M}_i = \dot{\mathbf{L}}, \quad (2.171)$$

pri čemer slednjega izraza še nismo izpeljali⁵⁵.

Ob predpostavki, da na togi rotor, znanih masnih lastnosti, deluje znani zunanji moment $\mathbf{M}$, imamo na sliki 2.76 pet nezanih veličin: $F_{x,1}$, $F_{y,1}$, $F_{x,2}$, $F_{y,2}$, $\varphi(t)$. Potrebujemo torej pet ravnotežnih enačb, da te neznanke določimo; iz izraza (2.170) lahko izpeljemo dve, preostale tri bomo izpeljali iz izraza (2.171).

Obravnavo izraza (2.171) moramo začeti z definicijo vrtilne količine togega telesa (2.135):

$$\mathbf{L}_1 = \int_m \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \, dm, \quad (2.172)$$

pri čemer smo z $\mathbf{L}_1$ poudarili, da gre za vrtilno količino v vrtečem se koordinatnem sistemu. Za razliko od mirujočega koordinatnega sistema (2.136) to pomeni, da sta vektorja:

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_{x_1} + y_1 \mathbf{e}_{y_1} + z_1 \mathbf{e}_{z_1} \quad (2.173)$$

in

$$\boldsymbol{\omega} = 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + \dot{\varphi} \mathbf{e}_{z_1}, \quad (2.174)$$

kjer smo upoštevali, da imamo rotacijo samo okoli z osi⁵⁶. Enotski vektor vrtečega koordinatnega sistema $\mathbf{e}_{x_1}$ je sicer v radialni smeri, $\mathbf{e}_{x_2}$ pa v krožni smeri (glejte poglavje 2.1.5).

Izračunajmo najprej vektorski produkt:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = x_1 \dot{\varphi} \mathbf{e}_{z_1} \times \mathbf{e}_{x_1} + y_1 \dot{\varphi} \mathbf{e}_{z_1} \times \mathbf{e}_{y_1} + z_1 \dot{\varphi} \mathbf{e}_{z_1} \times \mathbf{e}_{z_1}. \quad (2.175)$$

Pri vektorskem produktu si pomagamo s sliko 2.77: $\mathbf{e}_{z_1} \times \mathbf{e}_{x_1} = \mathbf{e}_{y_1}$, $\mathbf{e}_{z_1} \times \mathbf{e}_{y_1} = -\mathbf{e}_{x_1}$ in $\mathbf{e}_{z_1} \times \mathbf{e}_{z_1} = 0$. Sledi:

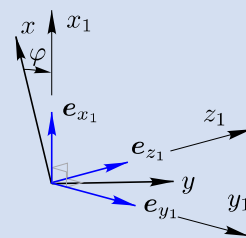
$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = x_1 \dot{\varphi} \mathbf{e}_{y_1} - y_1 \dot{\varphi} \mathbf{e}_{x_1}. \quad (2.176)$$

Rezultat pomnožimo vektorsko z leve strani z $\mathbf{r}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = & \dot{\varphi} (x_1 x_1 \mathbf{e}_{x_1} \times \mathbf{e}_{y_1} - \\ & y_1 x_1 \mathbf{e}_{x_1} \times \mathbf{e}_{x_1} + \\ & x_1 y_1 \mathbf{e}_{y_1} \times \mathbf{e}_{y_1} - \\ & y_1 y_1 \mathbf{e}_{y_1} \times \mathbf{e}_{x_1} + \\ & x_1 z_1 \mathbf{e}_{z_1} \times \mathbf{e}_{y_1} - \\ & y_1 z_1 \mathbf{e}_{z_1} \times \mathbf{e}_{x_1}). \end{aligned} \quad (2.177)$$

⁵⁵Za ravninsko gibanje smo izpeljali izraz (2.158)

⁵⁶Vektor krožne hitrosti bi sicer lahko zapisali tudi v nepomičnem koordinatnem sistemu z enotskimi vektorji $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, vendar ker je nenična komponenta samo v z smeri in ker sta enotska vektorja $\mathbf{k}$ in $\mathbf{e}_{z_1}$ enaka, smo na tak način poenostavili izračun vektorskega produkta.



Slika 2.77

Ugotovimo, da je enotski vektor vektorsko pomnožen sam sabo enak nič in si ponovno pomagamo s sliko 2.77: $\mathbf{e}_{x_1} \times \mathbf{e}_{y_1} = \mathbf{e}_{z_1}$, $\mathbf{e}_{y_1} \times \mathbf{e}_{x_1} = -\mathbf{e}_{z_1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = & \dot{\varphi} (x_1 x_1 \mathbf{e}_{z_1} + y_1 y_1 \mathbf{e}_{z_1} \\ & - x_1 z_1 \mathbf{e}_{x_1} - y_1 z_1 \mathbf{e}_{y_1}). \end{aligned} \quad (2.178)$$

Potem, ko dodamo še integriranje po masi $\int_m \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} dm$, izpeljemo vrtilno količino togega rotorja pri vrtenju glede na nepomično os v prostoru:

$$\mathbf{L}_1 = -\dot{\varphi} J_{x_1 z_1} \mathbf{e}_{x_1} - \dot{\varphi} J_{y_1 z_1} \mathbf{e}_{y_1} + \dot{\varphi} J_{z_1 z_1} \mathbf{e}_{z_1}, \quad (2.179)$$

kjer smo z $J_{x_1 z_1}$, $J_{y_1 z_1}$ in $J_{z_1 z_1}$ označili masne vztrajnostne momente, izračunane v vrtečem koordinatnem sistemu $x_1 y_1 z_1$.

Sedaj moramo izraz (2.179) še odvajati po času:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}_1 = & -\ddot{\varphi} J_{x_1 z_1} \mathbf{e}_{x_1} - \dot{\varphi} J_{x_1 z_1} \dot{\mathbf{e}}_{x_1} - \ddot{\varphi} J_{y_1 z_1} \mathbf{e}_{y_1} \\ & - \dot{\varphi} J_{y_1 z_1} \dot{\mathbf{e}}_{y_1} + \ddot{\varphi} J_{z_1 z_1} \mathbf{e}_{z_1}, \end{aligned} \quad (2.180)$$

pri čemer smo upoštevali, da je $\mathbf{e}_{z_1}$ konstanten in je odvod po času enak nič. Iz obravnave polarnega koordinatnega sistema vemo (2.45) in (2.49):

$$\dot{\mathbf{e}}_{x_1} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_{y_1} \quad \dot{\mathbf{e}}_{y_1} = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_{x_1}. \quad (2.181)$$

Izraz (2.180) torej preoblikujemo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}_1 = & -\ddot{\varphi} J_{x_1 z_1} \mathbf{e}_{x_1} - \dot{\varphi}^2 J_{x_1 z_1} \mathbf{e}_{y_1} - \ddot{\varphi} J_{y_1 z_1} \mathbf{e}_{y_1} \\ & + \dot{\varphi}^2 J_{y_1 z_1} \mathbf{e}_{x_1} + \ddot{\varphi} J_{z_1 z_1} \mathbf{e}_{z_1}. \end{aligned} \quad (2.182)$$

⁵⁷Ravnotežje momentov lahko seveda napišemo tudi za drugi ležaj. Glejte tudi zgled 2.4.3.

Ko združimo izraz (2.171) z (2.182) izpeljemo⁵⁷:

$$\begin{aligned} x_1 : & \quad \sum M_{x_1} = -J_{x_1 z_1} \ddot{\varphi} + J_{y_1 z_1} \dot{\varphi}^2 \\ y_1 : & \quad \sum M_{y_1} = -J_{x_1 z_1} \dot{\varphi}^2 - J_{y_1 z_1} \ddot{\varphi} \\ z_1 : & \quad \sum M_{z_1} = +J_{z_1 z_1} \ddot{\varphi}, \end{aligned} \quad (2.183)$$

kjer je v konkretnem primeru $M_{x_1} = -F_{y_2} l$ in $M_{y_1} = F_{x_2} l$. Tako smo pridobili tri enačbe in da lahko določimo vseh pet neznank, potrebujemo še dve enačbi, ki pa ju pridobimo iz izraza (2.170):

$$\begin{aligned}x_1 : F_{x_1} + F_{x_2} &= m a_r = -m e \dot{\varphi}^2 \\y_1 : F_{y_1} + F_{y_2} &= m a_\varphi = m e \ddot{\varphi},\end{aligned}\quad (2.184)$$

kjer smo za vrteči koordinatni sistem vstavili radialni $\mathbf{a}_r$ in krožni $\mathbf{a}_\varphi$ pospešek (2.51).

Zaključimo lahko torej, da smo izpeljali izraze, ki nam za togi rotor znanih masnih lastnosti (ekscentričnost, masa, matrika masnih vztrajnostnih momentov) ob zunanjem momentu M podajo odgovor o dinamičnih silah v ležajih in o kotnem pospešku rotorja.

Uravnoteženje togih rotorjev

V tem poglavju bomo dinamične sile v ležajih togega rotorja zmanjšali na nič in ga tako *dinamično masno uravnotežili*⁵⁸. To lahko dosežemo tako, da so zunanji momenti okoli osi x_1 in osi y_1 v izrazu (2.183) enaki nič; posledično to pomeni, da morajo biti deviacijski masni vztrajnostni momenti rotorja $J_{x_1 z_1}$ in $J_{y_1 z_1}$ enaki nič. Če zunanji momenti okoli osi x_1 in osi y_1 definirajo (nične) sile na drugi ležaj, potem bodo sile v prvem ležaju nič, če bo tudi ekscentričnost e v izrazu (2.184) enaka nič.

Če sklenemo: o dinamičnem uravnoteženju togega rotorja govorimo, kadar uspemo zadostiti dva pogoja:

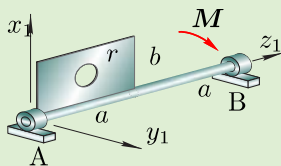
1. deviacijski masni vztrajnostni momenti rotorja so enaki nič,
2. ekscentričnost rotorja je enaka nič.

V praksi to ni nikoli mogoče, saj vedno preostane določen del masne neuravnoteženosti. V kolikor so rotorji ozki (npr. kolesarsko kolo), se lahko zadovoljimo že, če uspemo zmanjšati ekscentričnost rotorja. V tem primeru govorimo o *statičnem uravnoteženju*.

Pri širokih rotorji (npr. parna turbina) pa bi statično uravnoteženje bilo nezadostno, zato je treba rotor dinamično masno uravnotežiti⁵⁹ in torej zmanjšati deviacijske MVM.

⁵⁸ Mednarodni standard za masno uravnoteženja togih rotorjev je ISO 1940-1:2003 [10].

⁵⁹ Pri dinamičnem uravnoteženju se na dveh ravninah rotorja popravi deviacijski MVM. Iz tega razloga se za dinamično uravnoteženje tudi uporablja ime *uravnoteženje na dveh ravninah*.



Slika 2.78

Zgled 2.4.3

Na sliki 2.78 je prikazan rotor, ki je sestavljen iz gredi dolžine $2a$, mase $2m$ in homogene pravokotne plošče velikosti $a \times b$, debeline t ter gostote ρ , iz katere na sredini izrežemo krožno ploščo polmera r . Konstantni moment M rotor začne vrteti iz mirovanja. Dolžino ležajev zanemarite.

Podatki: $m = 1 \text{ kg}$, $a = 50 \text{ cm}$, $b = 20 \text{ cm}$, $t = 1 \text{ cm}$, $r = 5 \text{ cm}$, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $M = 1 \text{ Nm}$, $t_1 = 1 \text{ s}$

Določite:

1. Število prostostnih stopenj rotorja.
2. Ali je rotor dinamično masno uravnotežen?
3. Kotni pospešek pri t_1 .
4. Kotno hitrost pri t_1 .
5. Dinamične sile v ležajih pri t_1 .

Rešitev

1. Os vrtenja omogoča gibanje z eno prostostno stopnjo: $P = 1$.
2. Ne. S slike je očitno, da ima rotor ekscentričnost in zato ni dinamično niti statično uravnotežen.
3. Kotni pospešek $\ddot{\varphi}$ določimo glede na izraz (2.183) $\sum M_{z_1} = J_{z_1 z_1} \ddot{\varphi}$:

$$\alpha_1 = \ddot{\varphi} = \frac{M}{J_{z_1 z_1}}.$$

4. Izraz za pospešek integriramo po času in upoštevamo začetne pogoje ($\dot{\varphi}(0 \text{ s}) = 0 \text{ rad/s}$, $\varphi(0 \text{ s}) = 0 \text{ rad}$) izpeljemo:

$$\omega_1 = \dot{\varphi} = \ddot{\varphi} t_1.$$

5. Da izračunamo dinamične sile, si pomagamo z izrazoma (2.183) in (2.184). Kotni pospešek α_1 in kotno hitrost ω_1

smo že določili, izračunamo še potrebne masne vztrajnostne momente (glejte dodatek 5.1 in 5.5.1):

$$J_{x_1 z_1} = m_p \frac{b}{2} \frac{a}{2} - m_k \frac{b}{2} \frac{a}{2} = 0,1808 \text{ kg m}^2$$

$$J_{y_1 z_1} = 0 \text{ kg m}^2$$

$$\begin{aligned} J_{z_1 z_1} &= \frac{1}{12} m_p b^2 + m_p \left(\frac{b}{2} \right)^2 - \\ &\quad \left(\frac{1}{4} m_k r^2 + m_k \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right) \\ &= 0,0981 \text{ kg m}^2, \end{aligned}$$

kjer je masa plošče brez luknje $m_p = a b t \rho = 7,85 \text{ kg}$ in mase krožnega izreza $m_k = \pi r^2 t \rho = 0,6165 \text{ kg}$.

Sedaj lahko izračunamo kotni pospešek in kotno hitrost:

$$\alpha_1 = 10,192 \text{ rad/s}^2 \quad \omega_1 = 10,192 \text{ rad/s}.$$

S pomočjo izraza (2.183) in slike 2.79 pa sile v podpori B:

$$\begin{aligned} F_{y_2} &= -\frac{1}{2a} (-J_{x_1 z_1} \alpha_1 + J_{y_1 z_1} \omega_1^2) \\ &= 1,84309 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{x_2} &= +\frac{1}{2a} (-J_{x_1 z_1} \omega_1^2 - J_{y_1 z_1} \alpha_1) \\ &= -18,7848 \text{ N}. \end{aligned}$$

Za izračun sil v ležaju A uporabimo koordinatni sistem $x_2 y_2 z_2$:

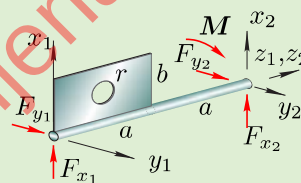
$$\sum M_{x_2} = -J_{x_2 z_2} \ddot{\varphi} + J_{y_2 z_2} \dot{\varphi}^2 = +2a A_{y_1}$$

$$\sum M_{y_2} = -J_{x_2 z_2} \dot{\varphi}^2 - J_{y_2 z_2} \ddot{\varphi} = -2a A_{x_1}.$$

Masni vztrajnostni momenti so:

$$\begin{aligned} J_{x_2 z_2} &= m_p \frac{b}{2} \frac{-3}{2} a - m_k \frac{b}{2} \frac{-3}{2} a \\ &= -0,5425 \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

$$J_{y_2 z_2} = 0 \text{ kg m}^2.$$



Slika 2.79

Sile v podpori A:

$$F_{y_1} = +\frac{1}{2a} (-J_{x_2 z_2} \alpha_1 + J_{y_2 z_2} \omega_1^2)$$

$$= 5,52927 \text{ N}$$

$$F_{x_1} = -\frac{1}{2a} (-J_{x_2 z_2} \omega_1^2 - J_{y_2 z_2} \alpha_1)$$

$$= -56,3545 \text{ N.}$$

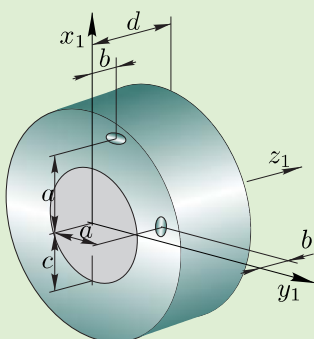
Dinamične sile v ležaju torej lahko izračunamo tako, da izračunamo dinamične momente v ležaju A in nato v ležaju B. Lahko pa namesto izračuna momentov v ležaju B (in pripadajočih MVM) sile v ležaju A izračunamo tudi s pomočjo II. Newtonovega zakona (2.184):

$$F_{x_1} + F_{x_2} = -(m_p - m_k + 2m) e \omega_1^2$$

$$F_{y_1} + F_{y_2} = (m_p - m_k + 2m) e \alpha_1,$$

kjer je ekscentričnost:

$$e = \frac{\frac{b}{2} m_p - \frac{b}{2} m_k + 0(2m)}{m_p - m_k + 2m} = 0,07834 \text{ m.}$$



Slika 2.80

Zgled 2.4.4

Na sliki 2.80 je prikazano avtomobilsko kolo mase m_k , ki je bilo pred popravilom dinamično uravnoteženo. Pri popravilu je vulkanizer na polmeru a in širini b dvakrat dodal maso m (kot je prikazano na sliki). Širina platišča je d .

Podatki: $a = 20 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $c = 17,8 \text{ cm}$, $d = 18 \text{ cm}$,
 $m = 20 \text{ g}$, $m_k = 20 \text{ kg}$

Določite:

1. Ali je kolo po popravilu statično uravnoteženo?
2. Ali lahko dinamično ravnotežje iščemo v narisanim koordinatnem sistemu?
3. Potrebne mase, ki jih dodamo na rob platišča na polmeru c , da bo kolo dinamično uravnoteženo.

Rešitev

1. Ne. Po popravilu je ekscentričnost kolesa:

$$e = \frac{2 a m}{m_k + 2 m} = 0,399 \text{ mm}$$

in rotor ni uravnotežen niti statično.

2. Da. Dinamično ravnotežje rezultira v nično ekscentričnost in je v poljubno zarotiranem koordinatnem sistemu izpolnjen pogoj, da težišče leži na ravnini $x_1 z_1$.

Zaradi enostavnosti bomo v nadaljevanju uporabili vrteči se koordinatni sistem xyz , ki je glede na koordinatni sistem $x_1 y_1 z_1$ zarotiran za 45° .

3. Dodati moramo še najmanj dve masi: m_1 in m_2 . Rešitev je več, tukaj bo izvedena samo ena.

Prvi pogoj je, da je kolo statično uravnoteženo (2.184); težišče mora biti v osi⁶⁰:

$$x_T = m a \cos \frac{\pi}{4} + m a \cos \frac{\pi}{4} + m_1 c + m_2 c.$$

⁶⁰V izbranem koordinatnem sistemu xyz je $y_T = 0$.

Da je kolo dinamično uravnoteženo (2.183), morajo biti deviacijski MVM enaki nič:

$$J_{xz} = 0 \quad J_{yz} = 0,$$

kjer sta masna deviacijska vztrajnostna momenta:

$$J_{xz} = m a \cos \frac{\pi}{4} (b) + m a \cos \frac{\pi}{4} (b) + m_1 c (0 \text{ m}) + m_2 c (d)$$

in:

$$J_{yz} = -m a \sin \frac{\pi}{4} (b) + m a \sin \frac{\pi}{4} (b) + m_1 (0 \text{ m}) (0 \text{ m}) + m_2 (0 \text{ m}) (d) = 0.$$

Enačba J_{yz} je torej odveč. Rešimo sistem preostalih dveh enačb in izpeljemo eno od rešitev:

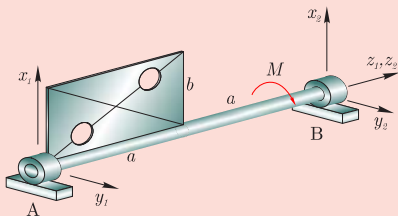
$$m_1 = -\frac{-\sqrt{2} a b m + \sqrt{2} a d m}{c d} = -22,9 \text{ g}$$

$$m_2 = -\frac{\sqrt{2} a b m}{c d} = -8,8 \text{ g.}$$

Negativna masa pomeni, da moramo maso odvzeti na polmeru c ali dodati na polmeru $-c$.

Naloga 2.4.6

Za rotor mase m , ki v začetku miruje, so znani MVM. Zaradi delovanja konstantnega momenta M začne pospeševati.



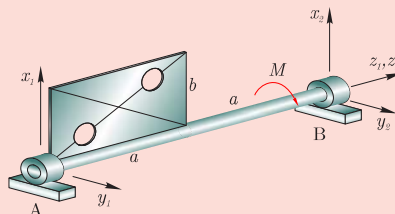
Podatki: $a = 0,900 \text{ m}$ $m = 1 \text{ kg}$
 $M = 7 \text{ Nm}$ $J_{x_1 z_1} = 0,400 \text{ kg m}^2$
 $J_{y_1 z_1} = 0 \text{ kg m}^2$ $J_{z_1 z_1} = 0,200 \text{ kg m}^2$
 $t = 4 \text{ s}$

Vprašanja:

1. Vpliv gravitacije kot statične sile je na dinamične sile v ležajih zanemarljiv. (1: Da, 2: Ne)
 Odg: 1
2. Vsota momentov okoli osi x_1 je:
 $\sum M_{x_1} = -J_{x_1 z_1} \ddot{\varphi} + J_{y_1 z_1} \dot{\varphi}^2 = -2a B_{y_2}$.
 (1: Da, 2: Ne)
 Odg: 1
3. Določite kotni pospešek $\ddot{\varphi}$ rotorja zaradi delovanja momenta M .
 Odg: $7,777 \text{ rad/s}^2$
4. Določite kotno hitrost $\dot{\varphi}$ rotorja pri času t .
 Odg: $31,1 \text{ rad/s}$
5. Določite silo B_{x_2} .
 Odg: $801 \times 10^{-3} \text{ N}$
6. Določite silo B_{y_2} .
 Odg: $877,7 \text{ N}$

Naloga 2.4.7

Za rotor mase m , ki v začetku miruje, so znani MVM. Gred dolžine $2a$ ima zanemarljivo maso. Zaradi delovanja konstantnega momenta M začne pospeševati.



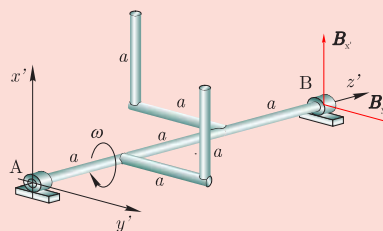
Podatki: $a = 0,300 \text{ m}$ $m = 7 \text{ kg}$
 $M = 5 \text{ Nm}$ $J_{x_1 z_1} = 0,200 \text{ kg m}^2$
 $b = 0,700 \text{ m}$ $t = 5 \text{ s}$ $J_{z_1 z_1} = 0,600 \text{ kg m}^2$

Vprašanja:

1. Vsota momentov okoli osi x_2 je:
 $\sum M_{x_2} = -J_{x_2 z_2} \ddot{\varphi} + J_{y_2 z_2} \dot{\varphi}^2 = ? 2a A_{y_1}$.
 (1: ? je minus, 2: ? je plus)
 Odg: 2
2. Določite kotni pospešek $\ddot{\varphi}$ rotorja zaradi delovanja momenta M .
 Odg: $\ddot{\varphi} = 8,888 \text{ rad/s}^2$
3. Določite kotno hitrost $\dot{\varphi}$ rotorja pri času t .
 Odg: $\dot{\varphi} = 222,1 \text{ rad/s}$
4. S pomočjo Steinerjevega stavka določite $J_{x_2 z_2}$.
 Odg: $J_{x_2 z_2} = 0,75 \text{ kg m}^2$
5. Določite $J_{y_2 z_2}$.
 Odg: $J_{y_2 z_2} = 0 \text{ kg m}^2$
6. Določite silo A_{x_1} .
 Odg: $801 \times 10^{-3} \text{ N}$
7. Določite silo A_{y_1} .
 Odg: $877,7 \text{ N}$

Naloga 2.4.8

Sestav iz palic se vrti s kotno hitrostjo ω , kar je prikazano na sliki. Vsaka palica ima dolžino a in maso m .



Podatki: $m = 8 \text{ kg}$ $a = 4 \text{ m}$ $\omega = 30 \text{ rad/s}$

Vprašanja:

1. Kotni pospešek sestava palic je nič, zato nekateri členi v ravnotežnih momentnih enačbah odpadejo. (1: Da, 2: Ne)

Odg: 1

2. Da dobimo sile v točki B nastavimo ravnotežne momentne enačbe za točko A. (1: Da, 2: Ne)

Odg: 1

3. Določite deviacijski vztrajnostni moment $J_{y'z'}$.

Odg: 591– kg m²

4. Določite deviacijski vztrajnostni moment $J_{x'z'}$.

Odg: 591 kg m²

5. Ali se deviacijski vztrajnostni momenti prikazanega sistema spremenijo, če izhodišče koordinatnega sistema prestavimo v točko B? (1: Da, 2: Ne)

Odg: 1

6. Določite silo $B_{x'}$.

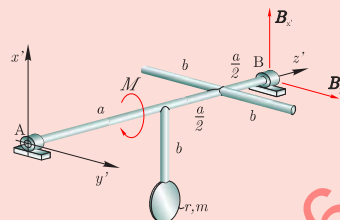
Odg: 801 × 10¹– N

7. Določite silo $B_{y'}$.

Odg: 801 × 10¹– N

Naloga 2.4.9

Proučujete poenostavljen sestav za zlaganje letalskih koles. Poenostavljen model je prikazan na sliki. Dolžinska masa palice je podana z ρ_l .



Podatki: $a = 0,520$ m $b = 0,460$ m
 $r = 0,100$ m $m = 1$ kg $\rho_l = 0,110$ kg/m
 $M = 37$ Nm $\omega_1 = 8,500$ rad/s

Vprašanja:

1. Določite osni MVM $J_{z'z'}$.

Odg: $J_{z'z'} = 758,0$ kg m²

2. Določite kotni pospešek, če na sestav deluje moment M .

Odg: $\ddot{\varphi} = 715,811$ rad/s²

3. Po kolikšnem času bo kotna hitrost enaka ω_1 ? (V začetku sistem miruje.)

Odg: $t_1 = 8,01 \times 10^{-2}$ s

4. Določite deviacijski MVM $J_{x'y'}$.

Odg: $J_{x'y'} = 0$ kg m²

5. Določite deviacijski MVM $J_{x'z'}$.

Odg: $J_{x'z'} = 795,0$ – kg m²

6. Določite deviacijski MVM $J_{y'z'}$.

Odg: $J_{y'z'} = 0$ kg m²

7. Kolikšna je sila $B_{y'}$ pri kotni hitrosti ω_1 in izračunanemu kotnemu pospešku $\ddot{\varphi}$?

Odg: $B_{y'} = 958,58$ – N